

ОСНОВЫ КИБЕРНЕТИКИ

Теория

Дисклеймер

В данном документе собраны (почти наверное) все теоретические вопросы с контрольных работ и письменных экзаменов по ОКаМ за 2006–2020 года 2го и 3го потока. Существует подобный документ с условиями задач и их решением. Ответы представляют из себя фото конспектов лекций Романова/Ложкина, скрины из методички и самодельных теорминов, а, следовательно, содержат в себе ошибки и недочеты.

РАБОТАЕТ ПОИСК ПО УСЛОВИЮ ЗАДАНИЯ!

Мы специально не классифицировали вопросы по номерам контрольных, т.к. на потоках они различаются и скачут из года в год. Однако мы постарались упорядочить вопросы по ходу повествования курса. Размеры документов намеренно сжаты, т.к. исходный проект весит ~ 300 МБ.

Для получения доступа к архиву с TeX файлом и изображениями и дальнейшей доработки данного проекта писать на почтовый адрес: alexsewell@icloud.com

P.S.

Все 6 авторов, сформировавшие исходный документ, сдали экзамен на «отлично», чего мы желаем и каждому последующему пользователю :)

Карантин, 2020 г.



Определение импликанты, простой импликанты и сокращенной ДНФ ФАЛ.
Утверждение о построении сокращенной ДНФ конъюнкции двух ФАЛ и получении сокращенной ДНФ из КНФ.

№1.

ЭК K явл. импликантой ФАЛ f , если K имплицирует f .

Импликанта K ФАЛ f наз. простой импл. f , если она не погл. никакой другой отп. от нее импликантой f (т.е. не имплицирует никакой другую импликанту).

Дизъюнкц. всех простых импликант ФАЛ f наз. ее сокр. ДНФ.

Пусть A' и A'' - сокр. ДНФ ФАЛ f_1, f_2 гесп., а ДНФ A без погл. получ. из форм. $A' \cdot A''$ врез-те. раскр. скобок и прев. породных $\Rightarrow A$ - сокр. ДНФ ФАЛ $f = f_1 \cdot f_2$.

$\Rightarrow$ Если ДНФ A без погл. получ. из КНФ B ФАЛ f врез-те. раскр. скобок и прев. породных, то A - сокр. ДНФ ФАЛ f .

Примечание: «resp.» (от respectively) – соответственно.

Определение импликанты, простой импликанты и сокращенной ДНФ ФАЛ, их «геометрическая» интерпретация на языке граней, покрытий и характеристических множеств.

Элементарная конъюнкция (ЭК) - конъюнкция букв различных переменных

$$K = X_1^{\sigma_1} \cdot X_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot X_r^{\sigma_r}, \quad \sigma_i \in \{0, 1\}, i = \overline{1, r} \quad r - \text{ранг ЭК}$$

$$x^{\sigma} = \begin{cases} \bar{x} & \sigma = 0 \\ x & \sigma = 1 \end{cases}$$

Характеристическое множество

ДНФ - дизъюнкция различных ЭК

$$N_f = \{ \tilde{z} \in B^n \mid f(\tilde{z}) = 1 \}$$

ФАЛ f имплицирует ФАЛ g $\Leftrightarrow N_f \subseteq N_g$

ЭК, которая имплицирует ФАЛ f , наз. импликантой этой ФАЛ

Импликанта K ФАЛ f наз. простой импликантой этой ФАЛ, если она не поглощается никакой функцией отличной от неё импликантой ФАЛ f

сокращённая ДНФ - дизъюнкция всех простых импликант ФАЛ f

Геометрическая интерпретация

$$\text{ДНФ: } N_f = N_{K_1} \cup \dots \cup N_{K_s} \quad (f = K_1 \vee \dots \vee K_s)$$

простые импликанты соотв. тах по включению граней N_f

сокр. ДНФ соотв. покрытие N_f всеми тах по включению гранями N_f этой ФАЛ

Определение элементарной конъюнкции (ЭК) и ДНФ, импликанты, простой импликанты и сокращенной ДНФ ФАЛ, их «геометрическая» интерпретация. Совершенная ДНФ и критерий единственности ДНФ ФАЛ.

Элементарная конъюнкция (ЭК) - конъюнкция букв различных переменных

$$K = X_1^{\sigma_1} \cdot X_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot X_n^{\sigma_n}, \quad \sigma_i \in \{0, 1\}, i = \overline{1, n} \quad n - \text{ранг ЭК}$$

$$x^{\sigma} = \begin{cases} \bar{x} & \sigma = 0 \\ x & \sigma = 1 \end{cases}$$

Характеристическое множество

ДНФ - дизъюнкция различных ЭК $N_f = \{ \tilde{z} \in B^n \mid f(\tilde{z}) = 1 \}$

ФАЛ f имплицирует ФАЛ $g \Leftrightarrow N_f \subseteq N_g$

ЭК, которая имплицирует ФАЛ f , наз. импликантой этой ФАЛ

Импликанта K ФАЛ f наз. простой импликантой этой ФАЛ, если она не поглащается никакой другой отличной от неё импликантой ФАЛ f

сокращённая ДНФ - дизъюнкция всех простых импликант ФАЛ f

Геометрическая интерпретация

ДНФ: $N_f = N_{K_1} \cup \dots \cup N_{K_s} \quad (f = K_1 \vee \dots \vee K_s)$

простые импликанты соотв. тах по включению граней N_f

сокр. ДНФ соотв. покрытие N_f всеми тах по включению граней N_f этой ФАЛ

Совершенная ДНФ - ДНФ, в которой все ЭК имеют ранги, совпадающие с числом переменных

Ув Сов. ДНФ ФАЛ $f \in P_2(n)$ является единственной ДНФ от БП $X(n)$, которая реализует эту ФАЛ $\Leftrightarrow$ во мн-ве N_f нет соседних наборов

В Утв. считаем, что $f \neq 0$.

Определение элементарной конъюнкции и элементарной дизъюнкции, ДНФ и КНФ, их геометрическая интерпретация. Критерий единственности ДНФ.

Конъюнкция (conj.) $\pi, 1 \leq \pi \leq n$, булев. разн. БГП назыв. эл. конъюнкцией (эл. conj) тогда и от бул. перемен.

Диз. разн. эк назыв. диз. норм. форматы (ДНФ).

Ком. разн. $\exists D$ - КНФ.

Представ. ФАЛ в виде ДНФ или КНФ имеет след. геом. интерпретацию:

$$\left. \begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= K_1 \vee \dots \vee K_s \leftarrow \text{назв. эл.} \\ f(x_1, \dots, x_n) &= J_1 \wedge \dots \wedge J_t \leftarrow \text{назв. эл.} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sim \begin{aligned} \pi_f &= \pi_{K_1} \vee \dots \vee \pi_{K_s} \\ \bar{\pi}_f &= \bar{\pi}_{J_1} \vee \dots \vee \bar{\pi}_{J_t} \end{aligned} \rightarrow \text{группы } B^n.$$

Лемма.

Сов. ДНФ ФАЛ $f \in B_2(W, \text{бул. лог. ДНФ от БГП } X(n), \text{ком. пред. эту ФАЛ}) \Leftrightarrow$ в K_f нет сосед. наборов.

Определение кратчайшей ДНФ и ее связь с тупиковыми ДНФ, определение функции Шеннона $\lambda(n)$ для длины кратчайших ДНФ, реализующих ФАЛ от n БП. Поведение функции Шеннона $\lambda(n)$ (идея получения верхней оценки и пример ФАЛ, на которой достигается нижняя оценка).

(3) $\lambda(A)$ - длина ДНФ (число ЭК) $\Rightarrow \min_A$ где f - кратчайшая. стр. 10

$\lambda(f) = \min_A \lambda(A) \Rightarrow \lambda(n) = \max_{f \in B(n)} \lambda(f)$

Для $\forall n \in \mathbb{N}: \lambda(n) = 2^{n-1}$.

Минимум: $f_n(\bar{x}^n) = x_1 \oplus \dots \oplus x_n; \lambda(f_n) = 2^{n-1}$

Верхний: Для $\forall$ БФ $f(\bar{x}^n) \in B_2(n) \Rightarrow f$ предст:
 $f(\bar{x}^n) = \bigvee_{\beta: (\beta_2, \dots, \beta_n) \in B^{n-1}} x_1^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n} \cdot f_\beta(x_1) \Rightarrow \lambda(f) \leq 2^{n-1}$ стр. 33

Определение элементарной конъюнкции и ДНФ, их «геометрическая» интерпретация на языке граней и покрытий. Определение совершенной ДНФ и ее построение для произвольной ФАЛ f от n БП.

(4) стр. 33

Элементарные конъюнкции (ЭК) - это формулы предст. собой конъюнкцию попарно разл букв переменных. $(K = x_{i_1}^{b_{i_1}} \cdot x_{i_2}^{b_{i_2}} \cdot \dots \cdot x_{i_n}^{b_{i_n}} \quad (b_i \in B, i = \overline{1..n}))$

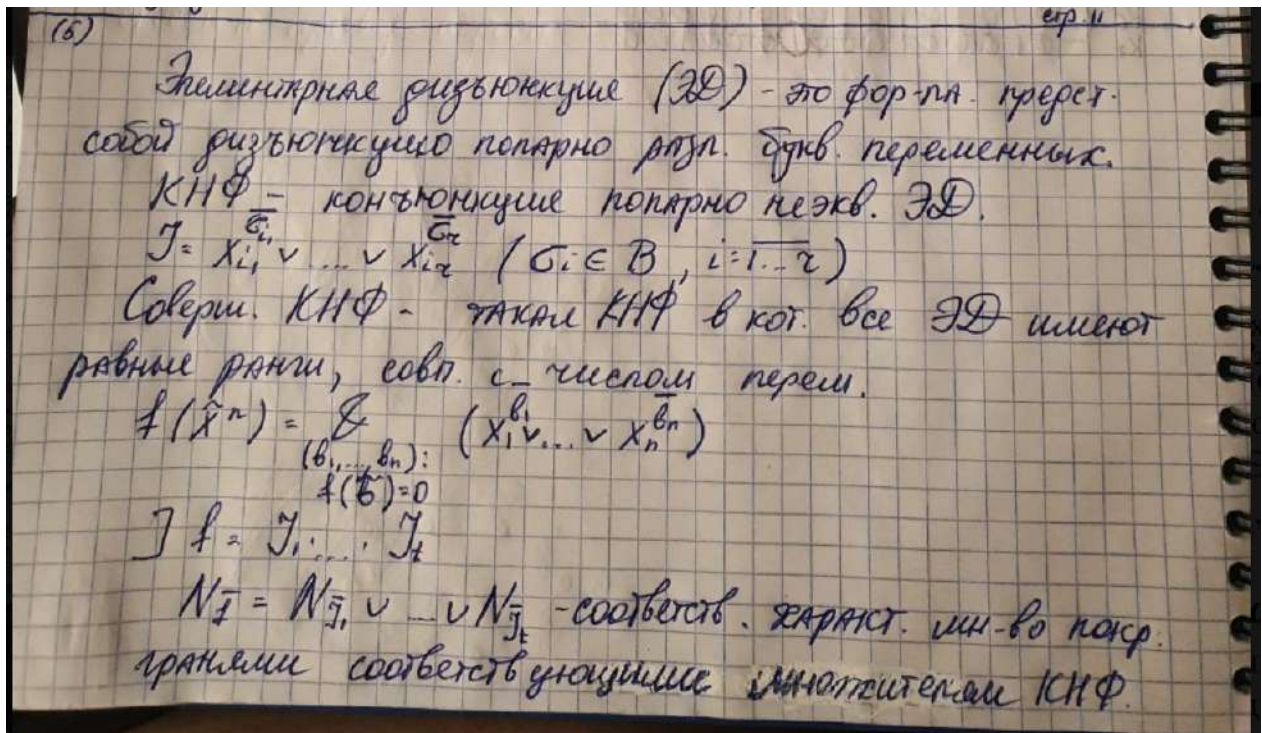
ДНФ - дизъюнкция попарно нежв. ЭК.

Соверш. ДНФ - такие ДНФ в кот. все ЭК имеют равные ранги, совп с числом переменных.

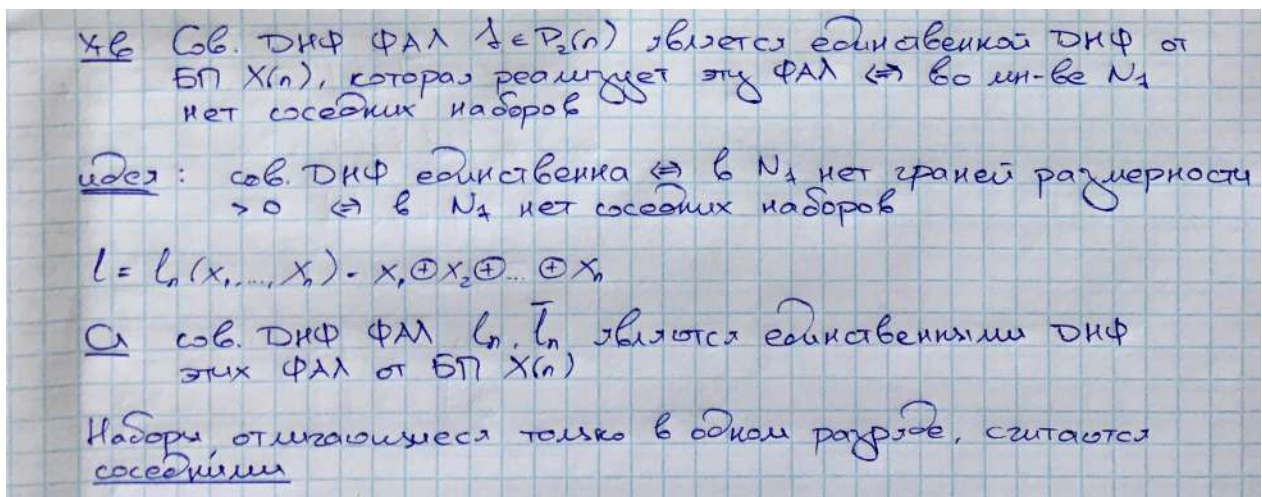
$N_f = N_{k_1} \cup N_{k_2} \cup \dots \cup N_{k_s}$ (где $f = k_1 \vee \dots \vee k_s$) - соотв. характ. ин-во покрыв. гранями соотв. слагаемых ДНФ.

$f(\bar{x}^n) = \bigvee_{(\beta_1, \dots, \beta_n) \in B^n} x_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\beta_n} \cdot f(\beta)$

Определение элементарной дизъюнкции и КНФ, их «геометрическая» интерпретация на языке граней и покрытий. Определение совершенной КНФ и ее построение для произвольной ФАЛ f от n БП.



Определение соседних наборов куба, формулировка и идея доказательства критерия единственности ДНФ для ФАЛ от n БП, следствие из него для линейных ФАЛ.



В Утв. считаем, что $f \neq 0$.

Тождество обобщенного склеивания, определение неприводимой ДНФ, то есть ДНФ без поглощений ЭК, и ее строгого расширения; критерий сокращенности ДНФ и построение сокращенной ДНФ из какой-либо ДНФ.

$$\text{АИОС: } x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_2 x_3$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = K_1 \vee \dots \vee K_s = \mathcal{A}. \leftarrow$$

ДНФ $\mathcal{A}$ вида $\mathcal{A}$ будем наз. ДНФ без поглощений ЭК, если ни одна из граней $K_1, \dots, K_s$ не содержится ни в одной из других граней покр. $N_{\mathcal{A}} = K_1 \vee \dots \vee K_s$.

Расширение $\mathcal{U}'$ ДНФ $\mathcal{U}$ считается строгим, если $\mathcal{U}'$ содержит ЭК, не явл. импликацией ни одной ЭК из $\mathcal{U}$.

ДНФ без поглощений ЭК явл. сокр. ДНФ $\Leftrightarrow$ когда она не имеет строгих расширений.

Из $\forall$ ДНФ $\mathcal{A}$ ФАП f можно получить сокр. ДНФ этой ФАП, в рез-те построение посл. строгих расширений и приведение подобных до получения ДНФ без поглощений ЭК, не имеющей строгих расширений.

Тождество обобщенного склеивания, определение расширения и строгого расширения ДНФ. Критерий сокращенности ДНФ и основные этапы его доказательства.

ДНФ A' наз. расширением ДНФ A , если она получена путём выделения с помощью тождеств ассоциативности и коммутативности формулы вида $x_i K' \vee \bar{x}_i K''$ и прии. к ним ТОС и послед. прив. порядков.

ДНФ A' наз. строгим расширением ДНФ A' , если она явл. расшир. A и содержит ЭК, не явл. импликацией ни одной ЭК из A .

ТНОС (тожд. обобщ. эквив.): $xK' \vee \bar{x}K'' = xK' \vee \bar{x}K'' \vee K'K''$

ДНФ без поглощений ЭК явл. сокращ. ДНФ $\Leftrightarrow$ она не имеет строгих расширений

$\exists K$ - прост. импл. $\nexists$ не вх. в ДНФ A без полн. не имеющую строг. расшир. от БП $x_1, \dots, x_n$ и Z - импл. всех импл. $\nexists$, не поглощаемые старшими A . $K \in Z$

$\Rightarrow$ в Z нет ЭК ранга n . $\exists K$ - ЭК макс. ранга из Z и БП x_i не вх. в $K \Rightarrow x_i K$ полн. сл. $x_i K' \in A$, $\bar{x}_i K$ полн. сл. $\bar{x}_i K'' \in A \Rightarrow K$ полн. сл. $K'K''$ или другой ЭК $\hat{K}$ в A (более коротк. чем K) $\Rightarrow$ (?)

Тождество поглощения и определение ДНФ без поглощений ЭК. Формулировка утверждения о построении сокращенной ДНФ конъюнкции двух ФАЛ из сокращенных ДНФ этих ФАЛ. Получение сокращенной ДНФ ФАЛ из произвольной КНФ этой ФАЛ.

Тождество поглощения: $t^{\Pi} : x_1 \vee x_1 x_2 = x_1$.

ДНФ $\mathcal{A}$ — без поглощений (т.е. неприводимая), если ни одна из ЭК не является импликантой другой ЭК в ней. К такой ДНФ нельзя применить тождество поглощения.

Утв. Пусть $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{A}''$ — сокращенные ДНФ функций f' и f'' , а неприводимая ДНФ $\mathcal{A}$ получается из формулы $\mathcal{A}' \cdot \mathcal{A}''$ в результате раскрытия скобок и приведения подобных, тогда $\mathcal{A}$ — сокращенная ДНФ функции $f = f_1 \cdot f_2$.

Идея доказательства. Пусть K — простая импликанта f , тогда K — импликанта каждой из f' и f'' . Т.к. $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{A}''$ — сокращенные ДНФ, то в этих ДНФ есть импликанты K' и K'' , для которых $K \rightarrow K' = 1$, $K \rightarrow K'' = 1$. Тогда в $\mathcal{A}$ войдет ЭК $\tilde{K}$, для которой $K'K'' \rightarrow \tilde{K} = 1$. Т.к. $K \rightarrow K'K'' = 1$, то $K \rightarrow \tilde{K} = 1$, но K — простая импликанта f , поэтому $K = \tilde{K}$ и K входит в $\mathcal{A}$. Таким образом, в $\mathcal{A}$ входят все простые импликанты.

метод Нельсона

Если ДНФ $\mathcal{A}$ без поглощения ЭК получается из КНФ B ФАЛ f в результате раскрытия скобок и приведения подобных, то $\mathcal{A}$ — сокращенная ДНФ ФАЛ f .

Определение ядровой точки, ядровой грани и ядра ФАЛ; ДНФ $\cap T$, критерий вхождения в нее простых импликант и идея его доказательства, ДНФ Квайна.

- Н1 • $\alpha \in B^n$ - ядровая точка ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$, если $\alpha \in N_f$ и α входит только в одну макс. грани ФАЛ f .
- Грани N_k , явл. макс. грани ФАЛ f и содер. α , назов. ядровой гранью.
 - Совокупность всех различных ядровых граней ФАЛ f назов. ядром ФАЛ f .
 - ДНФ $\cap T$ ФАЛ f - дизъюнкция всех различных ПИ этой ФАЛ, которые входят в любую тупиков.
- ДНФ ФАЛ f .
- ДНФ $\cap T$ ФАЛ f состоит из тех ПИ ФАЛ f , которые соотв. ядровой грани этой ФАЛ.
- Идея док-ва: 1) $\cap T$ тупиковая ДНФ ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ не включает в себя ПИ K , кот. соотв. ядровой грани N_k ФАЛ f .
- Т.к. все отличие от K ПИ образует 0 на наборе α , то ДНФ $\cap T$ также $= 0 \Rightarrow f(\alpha) = 0$ - противоречие
- 2) $\cap T$ ПИ K соотв. N_k , не вход. в ядро ФАЛ f .
- Каждая точка грани N_k покр. хотя бы одной отличной от N_k макс. гр. $\Rightarrow$
- $\Rightarrow$ все отличные от N_k образуют покрытие мн-ва N_f , у кот. вообще тупиковое подпокр., не сод. ЭК K .
- ДНФ, назов. у сокр. ДНФ ФАЛ f удам. тех ЭК K , для которых N_k покрыв. ядром ФАЛ f , но не входит в него, назов. ДНФ Квайна.

Определение пучка, регулярной точки и регулярной грани ФАЛ; ДНФ ΣT и критерий вхождения в нее простых импликант, идеи доказательства его необходимости и достаточности.

- Н1 • $f(x_1, \dots, x_n)$ - ФАЛ, $\alpha \in N_f$. $\Pi_\alpha(f)$ - мн-во всех проходящих через α макс. граней ФАЛ f .
- $\Rightarrow \Pi_\alpha(f)$ - пучок ФАЛ f через точку α .
- $\alpha \in N_f$ - регул. точка ФАЛ f , если $\exists \beta \in N_f: \Pi_\beta(f) \subset \Pi_\alpha(f)$
 - Грани, все точки которой регулярны - регулярная
 - ПИ K ФАЛ f входит в ДНФ $\Sigma T \Leftrightarrow$ грани N_k не явл. регул. гранью этой ФАЛ.
- Идея док-ва: возьмем все регул. точки $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ и $\beta_1, \dots, \beta_s$ (соотв. $\alpha_1, \dots, \alpha_s$) так, что любая макс. грань, проход. через β_i проходит через $\alpha_i \Rightarrow$ любая система макс. граней покрыв. точки $\alpha_1, \dots, \alpha_s \Rightarrow N_k$ - регулярная не входит в тупиковое покрытие
- $\cap N_k$ - не-регулярная, $\alpha \in N_k$ - не-регул.; $\exists \beta_1 \dots \beta_q \in N_f \setminus N_k$
- Т.к. α - нерегул. $\Rightarrow \Pi_{\beta_i}(f) \not\subset \Pi_\alpha(f)$, $\Pi_{\beta_i}(f) \neq \Pi_\alpha(f) \Rightarrow$ в итоге любое покрытие N_f будет соотв. тупиковому

Линейная зависимость ФАЛ f от заданной БП и особенности импликант такой ФАЛ f (с обоснованием). Монотонная зависимость ФАЛ g от заданной БП и особенности простых импликант такой ФАЛ g (с обоснованием).

Опр. БФ $f(x_1, \dots, x_n)$ — линейная $\Leftrightarrow f$ представима в виде

$$f = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n x_n, \quad a_0, \dots, a_n \in \{0, 1\}$$

Опр. БФ $f(x^n)$ линейно зависит от БП $x_i \Leftrightarrow f = x_i \oplus f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$

Опр. Во всяком слагаемом всякой ДНФ БФ f , линейной по x_i , есть множитель, содержащий x_i :

(если K , не содержащая букв БП x_i , входит в ДНФ D как слагаемое, то и K и D обращаются в 1 на некотором соседних по x_i наборам Φ)

Замечание. У линейной БФ в n -слагаемой ДНФ, реализующей f , входит буква каждой существенной БП x_i .

Опр. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ лежат в $\mathcal{B}^n$; α предшествует набору β ($\alpha \leq \beta$) $\Leftrightarrow \forall i = \overline{1, n} \quad \alpha_i \leq \beta_i$

Опр. БФ $f(x^n)$ — монотонная $\Leftrightarrow$ для $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{B}^n : \alpha \leq \beta \Rightarrow f(\alpha) \leq f(\beta)$

Опр. Набор $\alpha \in \mathcal{B}^n$ наз. нижней единицей БФ $f(x^n)$ $\Leftrightarrow f(\alpha) = 1$ и для $\forall \beta : \beta \neq \alpha$ и $\beta \leq \alpha \Rightarrow f(\beta) = 0$

В простых импликантах БФ $f(x^n)$ не встречается отрицание переменной x_i

• $\exists K$ -импликанта БФ f , и $\exists \bar{x}_i$ в K есть множитель $\bar{x}_i \Rightarrow$ тогда K' , полученная из K удалением $\bar{x}_i$ — тоже импликанта f .

$\exists \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$ — произвольный набор: $K(\alpha) = 1$

т.к. f — монотонная БФ имеем $f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) = 1 \Rightarrow$

K' -импликанта БФ $f \Rightarrow K$ — не збл. простой

Имеем: в цикловых и в сокращенных ДНФ монотонной БФ нет отрицаний

Определение монотонной ФАЛ и ее «нижних» единиц. Утверждение о сокращенной ДНФ монотонной ФАЛ и обоснование единственности ее тупиковой ДНФ.

Опр. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ лежат в $\mathcal{D}^n$; α предшествует набору β ($\alpha \in \beta$) $\Leftrightarrow \forall i = \overline{1, n} \alpha_i \leq \beta_i$.

Опр. БФ $f(\bar{x}^n)$ — монотонная $\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathcal{D}^n : \alpha \in \beta \Rightarrow f(\alpha) \leq f(\beta)$.

Опр. Набор $\alpha \in \mathcal{D}^n$ на нижней единице БФ $f(\bar{x}^n)$ $\Leftrightarrow f(\alpha) = 1$ и $\forall \beta \in \mathcal{D}^n : \beta \neq \alpha$ и $\beta \leq \alpha \Rightarrow f(\beta) = 0$.

Лемма 4.1 Сокращенная ДНФ A монотонной БФ $f \in B_2(n)$ экв. единичной тупиковой ДНФ этой БФ и имеет вид

$$A(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{p \in N_1^+} K_p^+(x_1, \dots, x_n)$$

▲ $f(\bar{x}^n)$ — БФ. В простых множителях f не может быть отрицаний $\Rightarrow$ всякий простой множитель K БФ f имеет вид K_p^+ для некоторого $p \in \mathcal{D}^n$.

Заметим: ЭК K_p^+ имплицирует ЭК $K_{p'}^+ \Leftrightarrow p' \leq p$.

ЭК K_p^+ имплицирует монотонную БФ $f(\bar{x}^n) \Leftrightarrow f(p) = 1$.

Таким образом, все простые множители монотонной БФ $f(\bar{x}^n)$ суть все ЭК вида $K_p^+(\bar{x}^n)$, где $p \in N_1^+$.

При этом все наборы из N_1^+ экв. zároveň тогда БФ f —

С) Монотонная БФ экв. тупиковой БФ

Определение тупиковой ДНФ и ее «геометрическая» интерпретация на языке граней и покрытий. Определение кратчайшей и минимальной ДНФ заданной ФАЛ, их связь с тупиковой ДНФ этой ФАЛ и ее обоснование.

ДНФ A , реализующая ФАЛ f является тупиковой $\Leftrightarrow \forall$ ДНФ A' , полученная из A удалением слагаемых и/или множителей из слагаемых, реализует ФАЛ, не равную f .

Тупиковая ДНФ состоит из простых импликант и является ДНФ без поглощений, а с геометрической точки зрения она соответствует тупиковому покрытию множества N_f максимальным граням.

Минимальной (кратчайшей) ДНФ ФАЛ f называется ДНФ наименьшего ранга (длины), реализующая f .

$\min$ ДНФ $\Rightarrow$ тупиковая ДНФ.

Среди тупиковых ДНФ всегда содержатся кратчайшие ДНФ.

Описание алгоритмов получения совершенной ДНФ заданной ФАЛ как из какой-либо ДНФ, так и какой-либо КНФ этой ФАЛ; обоснование корректности указанных алгоритмов ссылками на соответствующие утверждения.

(6)? Геометрические соображения - всё следует из опр. связи с сокр ДНФ. (выбираются грани соотв. ЭК лог. покр. каждой грани куба и даются данные соотв. или ЭК (они прост.))

? Карты Карно - рассм. в виде табл. $\Pi_2(f)$ в кот. наборы (10) и (11) помечены крестиками, а прот. стороны ототур. по типу пере.

? Метод Блэйка - метод позв. получ. из ВДНФ этой ФАЛ с помощью экв. преобр. с исп. ТОС (покр. оболоч. эквив.)

- (т.е. $\Rightarrow$ ДНФ без погл. ЭК экв. сокр ДНФ $\Leftarrow$ не имеют строгих расширений)

Из ВДНФ A от f можно получ. сокр ДНФ от f в рез-те постр. посл. строгих. расшир. и приведение подобн. до получ. ДНФ без погл. ЭК, не имеющих строгих расшир.

- Если ДНФ A без погл. получ. из КНФ B где f в рез-те раскр. скобок. и прив. подобным, то A - сокр. ДНФ. $\Leftarrow$ т. A' и A'' - сокр. ДНФ от f' и f'' соотв., а A ДНФ без погл. получ. из $A' \cdot A''$ в рез-те раскр. скобок и привер. подобн. $\Rightarrow A$ сокр. ДНФ от f .)

Определение покрытия матрицы, понятие тупикового и минимального покрытия; градиентный алгоритм построения покрытия и утверждение о длине градиентного покрытия.

Система строк с номерами из I образует покр. матрицы M , если каждый её столбец покрывается хотя бы одной строкой с номером из I . Аналогично понимается покр. одного или-ва строк M группой или-вог. строк M .

Покрытие, не имеющее собственных подпокрытий, наз. тупиковым.

Про минимальное?

Покрытие matr. M , в кот. ни одна строка не покр. другой строкой, считается неприводимым.

Градиентный алгоритм ориент. на выделение из заданного покрытия достаточно "коротких" подпокрытий или, иначе, на построение достаточно "коротких" покрытий для заданной матрицы.

Алгоритм:

- 1) На каждом шаге в покрытие добавляется строка, покрывающая наибольшее число непокрытых ранее столбцов (если таких строк несколько, то из них выбирается строка с наименьшим номером);
- 2) Затем вычеркивается выбранная строка (номера оставшихся строк сохраняются) и все покрытые этой строкой столбцы;
- 3) Алгоритм останавливается на следующем шаге после построения покрытия.

Утв. Пусть для $\gamma \in \mathbb{R}$, $0 < \gamma \leq 1$, в каждом столбце матрицы M , $M \in B^{p,s}$, имеется не меньше, чем $\gamma \cdot p$ единиц. Тогда покрытие матрицы M , получаемое с помощью градиентного алгоритма, имеет длину не больше, чем:

$$\left\lceil \frac{1}{\gamma} \ln^+(\gamma s) \right\rceil + \frac{1}{\gamma},$$

где $\ln^+(x) = \ln(x)$, $x \geq 1$ и 0 , $0 < x < 1$.

Формулировка утверждения о длине градиентного покрытия матрицы с заданной долей единиц в ее столбцах (с расшифровкой всех параметров и обозначений), идея его доказательства.

Утв. Пусть для $\gamma \in \mathbb{R}$, $0 < \gamma \leq 1$, в каждом столбце матрицы M , $M \in B^{p,s}$, имеется не меньше, чем $\gamma \cdot p$ единиц. Тогда покрытие матрицы M , получаемое с помощью градиентного алгоритма, имеет длину не больше, чем:

$$\lceil \frac{1}{\gamma} \ln^+(\gamma s) \rceil + \frac{1}{\gamma},$$

где $\ln^+(x) = \ln(x)$, $x \geq 1$ и 0 , $0 < x < 1$.

Идея доказательства:

Пусть покрытие длины q . Рассмотрим шаг t алгоритма. δ_t - доля оставшихся столбцов. Поскольку за один шаг мы удаляем не менее одного столбца, справедливо неравенство: $q \leq t + \delta_t s$. В матрице на шаге t всего $\gamma p s \delta_t$ единиц - в среднем $\gamma s \delta_t$ единиц в строке. Таким образом, в максимальной строке не меньше, чем $\gamma s \delta_t$ единиц. Отсюда получаем $s \delta_{t+1} = s_{t+1} \leq s_t - \gamma s \delta_t = s \delta_t (1 - \gamma)$. Следовательно, $\delta_t \leq (1 - \gamma)^t \leq e^{-\gamma t}$. Выбирая $t = \lceil \frac{1}{\gamma} \ln^+(\gamma s) \rceil$, и подставив его в первое неравенство, получим необходимую оценку.

Градиентный алгоритм построения покрытия матрицы. Верхняя оценка доли тех столбцов матрицы M , $M \in B^{p,s}$, которые остались не покрытыми после t шагов применения градиентного алгоритма, если в каждом столбце матрицы M имеется не меньше, чем $\gamma \cdot p$ единиц, где $0 < \gamma \leq 1$, и ее обоснование.

Алгоритм:

- 1) На каждом шаге в покрытие добавляется строка, покрывающая наибольшее число непокрытых ранее столбцов (если таких строк несколько, то из них выбирается строка с наименьшим номером);
- 2) Затем вычеркивается выбранная строка (номера оставшихся строк сохраняются) и все покрытые этой строкой столбцы;
- 3) Алгоритм останавливается на следующем шаге после построения покрытия.

Верхняя оценка:

Пусть покрытие длины q . Рассмотрим шаг t алгоритма. δ_t - доля оставшихся столбцов. Поскольку за один шаг мы удаляем не менее одного столбца, справедливо неравенство: $q \leq t + \delta_t s$. В матрице на шаге t всего $\gamma p s \delta_t$ единиц - в среднем $\gamma s \delta_t$ единиц в строке. Таким образом, в максимальной строке не меньше, чем $\gamma s \delta_t$ единиц. Отсюда получаем $s \delta_{t+1} = s_{t+1} \leq s_t - \gamma s \delta_t = s \delta_t (1 - \gamma)$. Следовательно, $\delta_t \leq (1 - \gamma)^t \leq e^{-\gamma t}$.

Определение покрытия матрицы M , $M \in B^{p,s}$, понятие тупикового и минимального покрытия. Таблица Квайна ФАЛ f ; соотношение между тупиковыми ДНФ ФАЛ f и покрытиями ее редуцированной таблицы Квайна.

О построении всех тупиковых покрытий
 Имеется мн-во N и семейство его подмн-в $M = \{N_1, \dots, N_r\}$,
 образующих покрытие $N: \bigcup_{i=1}^r N_i = N$. $\exists N = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$
 Составим паре (N, M) $(0,1)$ -матрицу $M = (a_{ij})^{p \times s}$, $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow \alpha_j \in N_i$.
 Заметим: в M нет нулевых столбцов.
 $B^{p,s}$ - класс всех $(0,1)$ -матриц размера $p \times s$.
 Будем говорить, что мн-во строк I матрицы M збл. покрытие
 этой матрицы $M \Leftrightarrow$ в подмн-ве матрицы M , составленной из всех
 строк мн-ва I , нет нулевых столбцов.

Таблица Квайна БФ 4 - это $(0,1)$ -матрица $M = M(f) \in B^{p,s}$:
 $i, j \in \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, s\}$ $M(i, j) = 1 \Leftrightarrow K_i(\alpha_j) = 1$ (т.е. $M(i, j) = K_i(\alpha_j)$)
 Доказ: тупиковая ДНФ БФ 4 соотв. туп. покрытие таблицы Квайна
 БФ 4 строками (и обратно)

Модифицированный алгоритм построения всех тупиковых ДНФ БФ 4
 $\hat{N}$ - мн-во всех зоровых и регулярных точек БФ 4
 Будем считать, что тах графы $N_{k_1}, \dots, N_{k_r}$ - зоровые
 $N_{k_1}, \dots, N_{k_r}$ - регулярные
 $\forall i = \overline{1, p} \quad N_i = N_{k_i} \cap \hat{N}$
 Задача построения всех тупиковых ДНФ p -и 4 сводится к задаче
 построения всех тупиковых покрытий матрицы, получаемой из
 таблицы Квайна вычеркиванием ^{строк} $N_{k_1}, \dots, N_{k_r}$ и столбцов,
 соотв. элементам $\hat{N}$, при этом каждое тупиковое покрытие
 $\{\hat{N}_1, \dots, \hat{N}_n\}$ этой матрицы порождает тупиковую ДНФ БФ 4, тах
 графы кот. суть $N_{k_1}, \dots, N_{k_n}, N_{k_1}, \dots, N_{k_r}$

Покрывание матрицы M , в котором ни одна строка не покрывается другой строкой, считается минимальным (неприводимым), а покрытие, не имеющее собственных подпокрытий называется тупиковым.

Определение ФАЛ покрытия $F(y_1, \dots, y_p)$ матрицы M , $M \in B^{p,s}$, ее свойства и связь с тупиковыми покрытиями; формулировка утверждения о представлении этой ФАЛ в виде КНФ и его следствие о построении всех тупиковых покрытий.

N2 • $\Leftarrow$ ФАЛ $F(y)$, у которой $F(\beta) = 1 \Leftrightarrow$ система строк матрицы M с номерами из $I(\beta)$ образует ее покрытие $\Rightarrow$ ФАЛ $F(y)$ - ф-е покрытие матрицы M

Сл-ва: 1) ФАЛ покрытия $F(y)$ - монотонная ФАЛ

2) Нижние единицы соотв. тупиковым покрытиям матрицы M

3) ф-е покрытие $F(y_1, \dots, y_p)$ матрицы M , $M \in B^{p,s}$, без лишних столбцов, задается КНФ в виде:

$$F(y_1, \dots, y_p) = \bigwedge_{j=1}^s \left(\bigvee_{1 \leq i \leq p} y_i \right) \\ M(i,j) = 1$$

• Следствие: если раскрыть скобки и привести подобие к КНФ, получим сокр. ДНФ ФАЛ $F(y)$, при которой всего один соотв. тупиковый покрывающий матрицы M

Определение протыкающего множества для граней заданного ранга в еденичном кубе и утверждение о верхней оценке его мощности (вывести эту оценку из оценки длины градиентного покрытия).

Задача о «протыкании» системы $\mathfrak{N}$, состоящей из подмножеств $N_1, N_2, \dots, N_p$ множества $N = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$, заключается в нахождении такого подмножества множества N , в котором при любом i , $i \in [1, p]$, имеется хотя бы один элемент из N_i . Эта задача сводится к задаче о выделении подпокрытия из покрытия отрезка $[1, p]$ его подмножествами $I_1, \dots, I_s$, где $I_i = \{j : \alpha_i \in N_j\}$ при всех i , $i \in [1, s]$.

Искомое подмножество множества N называется протыкающим множеством граней $N_1, N_2, \dots, N_p$.

Лемма 6.1 ([19]). *При любых натуральных n и m , $m \leq n$, в кубе B^n всегда найдется подмножество мощности не более, чем $n \cdot 2^m$, протыкающее все грани ранга m .*

Доказательство. Применяя указанный выше подход, рассмотрим множество N , состоящее из всех граней ранга m куба B^n , $|N| = \binom{n}{m} \cdot 2^m$, а также систему $\mathfrak{N} = \{N_\alpha\}_{\alpha \in B^n}$ его подмножеств, где N_α — множество тех граней из N , которые проходят через точку α . Очевидно, что каждая грань из N содержится в тех 2^{n-m} подмножествах N_α , для которых точка α принадлежит этой грани. Следовательно, матрица M , связанная с парой $(N, \mathfrak{N})$, состоит из $p = 2^n$ строк и $s = \binom{n}{m} \cdot 2^m$ столбцов, в каждом из которых имеется $p \cdot \gamma$, где $\gamma = 2^{-m}$, единиц. Искомое множество наборов получается в результате применения к матрице M теоремы 6.1 и построения покрытия длины q , где

$$\begin{aligned} q &\leq \left\lceil 2^m \ln^+ \left(\binom{n}{m} \right) \right\rceil + 2^m \leq \left\lceil 2^m \log \left(\binom{n}{m} \right) \right\rceil + 2^m \leq \\ &\leq 2^m (n - 1) + 2^m = n \cdot 2^m. \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Определение длины $\lambda(f)$ и ранга $R(f)$ для ДНФ, реализующих ФАЛ f . Точная и развернутая (на языке стремящихся к нулю последовательностей) формулировка утверждения о верхней оценке значений функционалов $\lambda(f)$ и $R(f)$ для «типичных» ФАЛ f от n БП. Идея доказательства данного утверждения на основе вероятностной модели ФАЛ и связанных с ней случайных величин.

Лемма 6.1 Для почти всех БФ $f \in B(n)$, выполняются неравенства

$$\lambda(f) \leq \frac{1}{4} 2^{n-1} (1 + O(n \cdot 2^{-n}))$$

$$R(f) \leq \frac{1}{4} n \cdot 2^{n-1} (1 + O(n \cdot 2^{-n}))$$

$\alpha \in D$, $\tilde{b}_\alpha$ - случайная величина (св.), принимающая значения 0, 1 с вероятностью $\frac{1}{2}$

Если $\alpha, \alpha' \in D$, $\alpha \neq \alpha'$, то св. $\tilde{b}_\alpha$ и $\tilde{b}_{\alpha'}$ независимы

св. $\tilde{b} = (\tilde{b}_{\alpha_1}, \tilde{b}_{\alpha_2}, \dots, \tilde{b}_{\alpha_m}, \tilde{b}_{\alpha'})$ - св. определяется реализацией БФ $f(x)$

Вероятность того, что св. $\tilde{b}$ равна некоторой БФ $f(x')$ есть $\frac{1}{2^n}$, т.е. на $B(n)$ задано равномерное распределение.

$\forall \alpha \in D \quad E \tilde{b}_\alpha = \frac{1}{2} \quad D \tilde{b}_\alpha = \frac{1}{4}$

$\eta = \sum_{\alpha \in D} \tilde{b}_\alpha$ т.к. св. $\tilde{b}_\alpha$ независимы, то $E \eta = \sum_{\alpha \in D} E \tilde{b}_\alpha = 2^{n-1}$

$$D \eta = \sum_{\alpha \in D} D \tilde{b}_\alpha = 2^{n-2}$$

Если реализация св. $\tilde{b}$ есть БФ $f(x')$, то состав реализации св. η есть $|N_1|$

Положим $m = \lceil n \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} \rceil$ $I(n) = (2^{n-1} - m, 2^{n-1} + m)$

Нер-во Чебышева: $P(|X - EX| \geq \alpha) \leq \frac{DX}{\alpha^2}$

$$P(\eta \notin I(n)) \leq \frac{D \eta}{m^2} \leq \frac{2^{n-2}}{n^2 \cdot 2^{n-2}} = \frac{1}{4n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$\Rightarrow$ Для почти всех БФ $f(x')$: $|N_1| \in (2^{n-1} - \lceil n \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} \rceil, 2^{n-1} + \lceil n \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} \rceil)$

$x_p = (x_{p,1}, x_{p,2}, \dots, x_{p,m}, x_{p,m+1}, \dots, x_{p,n})$ - случайная величина

$$E x_p = \frac{3}{4} \quad D x_p = \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$$

$\tilde{x} = (x_{p,1}, x_{p,2}, \dots, x_{p,m}, x_{p,m+1}, \dots, x_{p,n})$

$\tilde{t} = \sum_{p=1}^{2^{n-1}} x_p$ т.к. св. x_p независимы, то $E \tilde{t} = 2^{n-1} \cdot \frac{3}{4} = 3 \cdot 2^{n-2}$

$$D \tilde{t} = 3 \cdot 2^{n-5}$$

$m = \lceil n \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} \rceil \quad I = I(n) = [\frac{3}{4} \cdot 2^{n-1} - m, \frac{3}{4} \cdot 2^{n-1} + m]$

по неравенству Чебышева имеем:

$$P(\tilde{t} \notin I) \leq \frac{D \tilde{t}}{m^2} = \frac{3 \cdot 2^{n-5}}{(n \cdot 2^{\frac{n-1}{2}})^2} = \frac{3}{32n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Значение λ случайной величины $\tilde{t}$ гарантирует существование реализации $f(x')$ св. $\tilde{b}$ ДНФ $\tilde{f}$ такой λ .

$\Rightarrow$ Для почти всех БФ $f(x')$ $\lambda(f) \leq \frac{1}{4} 2^{n-1}$ $R(f) \leq \frac{1}{4} n \cdot 2^{n-1}$

Замечание 6.2

Эффект Шеннона для $\lambda(f)$ и $R(f)$ не имеет места

$\lambda(f) = \min \lambda(A)$, $R(f) = \min R(A)$, где $\min$ берется по всем ДНФ A , реализующим f , $\lambda(A)$ - длина ДНФ A - число слагаемых в A , $R(A)$ - ранг ДНФ A - число вхождений БП в ДНФ A .

Вероятностная модель ФАЛ из $P_2(n)$ и связанные с ней случайные величины, которые характеризуют длину ее совершенной ДНФ, а также длину ДНФ, получающейся в результате разложения этой ФАЛ по БП $x_2, \dots, x_n$. Математическое ожидание и дисперсия указанных случайных величин; полученные с их помощью оценки длин упомянутых ДНФ для почти всех ФАЛ.

ОТВЕТ НА ПРЕДЫДУЩЕЙ СТРАНИЦЕ

Определение функции Шеннона $\lambda_{\text{сокр.}}(n)$ для длины сокращенной ДНФ у ФАЛ от n БП, ее нижняя оценка и пример ФАЛ, на которой она достигается (с обоснованием этой достижимости).

$\lambda_{\text{сокр.}}(1)$ - длина сокр. ДНФ БФ 1 • $\lambda_{\text{сокр.}}(n) = \max_{f \in B_2^n} \lambda_{\text{сокр.}}(f)$

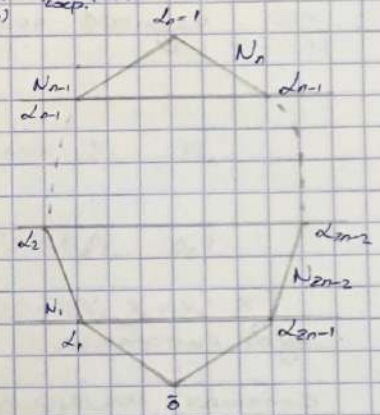
Лемма 7.2 $\lambda_{\text{сокр.}}(n) \geq e \cdot \frac{3^n}{n}$, $e_1 = \text{const}$

Изучим структуру тех графов $S_n^{[r,p]}$

$(\underbrace{1, \dots, 1}_n, 0, \dots, 0)$

$(\underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-p}, 0, \dots, 0)$

цепка
БФ длины
(2n-2) в кубе B^n



сокр. ДНФ $S_n^{[r,p]} = \bigvee_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-p+r} \leq n} (\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_{n-p+r}}) X_{i_1}^{\sigma_{i_1}} \dots X_{i_{n-p+r}}^{\sigma_{i_{n-p+r}}}$

$$\lambda_{\text{сокр.}}(S_n^{[r,p]}) = \lambda(\text{сокр. ДНФ } S_n^{[r,p]}) = \binom{n}{r} \binom{n-r}{n-p} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \frac{(n-r)!}{(n-p)!(p-r)!} = \frac{n!}{((\lceil \frac{n}{3} \rceil)!)^2 (n-2\lceil \frac{n}{3} \rceil)!}$$

Ф-ла Стирлинга $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \Rightarrow c_1 \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq c_2 \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$, $c_1, c_2 = \text{const} > 0$

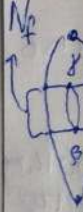
$$\lambda_{\text{сокр.}}(S_n^{[r,p]}) \geq \frac{c_3 \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{\left(\frac{n}{3}\right)^3 \left(\lceil \frac{n}{3} \rceil\right)^{2\lceil \frac{n}{3} \rceil} (n-2\lceil \frac{n}{3} \rceil)^{n-2\lceil \frac{n}{3} \rceil}}} \geq \frac{c_4}{n \left(\frac{1}{3} + \frac{c_5}{n}\right)^{2\lceil \frac{n}{3} \rceil} \left(\frac{1}{3} - \frac{c_6}{n}\right)^{n-2\lceil \frac{n}{3} \rceil}} = \frac{c_4 \cdot 3^n}{n \left(1 + \frac{3c_5}{n}\right)^{2\lceil \frac{n}{3} \rceil} \left(1 - \frac{3c_6}{n}\right)^{n-2\lceil \frac{n}{3} \rceil}} \geq e \cdot \frac{3^n}{n}$$

Докажем лем. 7.2

Определение функции Шеннона $\lambda_{\text{сокр.}}(n)$ для длины сокращенной ДНФ у ФАЛ от n БП и формулировка утверждения о ее нижней оценке. Симметрические ФАЛ и их «рабочие» числа, пример симметрической ФАЛ, на которой указанная оценка достигается (с обоснованием достижимости).

$f \in P_2(n)$ -сим. ФАЛ $\Leftrightarrow f(\beta) = f(\gamma)$, если β и γ перестан. БП. $\Leftrightarrow$ f принимает один знак на $\forall$ наборах с рав. числом "1", т.е. сим. гр-упа в $P_2(n) = 2^{n+1}$


 B^n_i такие слов $n+1$, на каждом слов либо "0" либо "1"
 $\Rightarrow N_f = B^n_{i_1} \cup B^n_{i_2} \cup \dots \cup B^n_{i_s}, 0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s = n$
 Обозн.: $S_n^I \rightarrow I = \{i_1, \dots, i_s\}$ рабочие числа


 $0 \leq r \leq p \leq n, S_n^{[r,p]}$ - каскадные гр-упы
 $\forall$ макс. транз. $f \leftrightarrow (\beta, \gamma): \beta \in B^n_r, \gamma \in B^n_p, \beta \leq \gamma$

Сокр. ДНФ $f: \bigvee_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-p+r}} x_{i_1}^{\beta_1} \dots x_{i_{n-p+r}}^{\beta_{n-p+r}}$
 $(\beta_1, \dots, \beta_{n-p+r}) \in B_r^{n-p+r}$

$\lambda_{\text{сокр.}} = \underbrace{C_n^{n-p+r}}_{\text{выбор } i_1, \dots, i_{n-p+r}} \cdot \underbrace{C_{n-p+r}^r}_{\text{выбор } \beta_1, \dots, \beta_{n-p+r}} \cdot \underbrace{2^{n-p+r}}_{\text{выбор } \gamma_1, \dots, \gamma_{n-p+r}}$, пусть $r = n - p = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$
 $\Rightarrow p - r \approx \frac{n}{3}$

$\approx \frac{n! (n-p+r)!}{(p-r)! (n-p+r)! (n-p)! r!} = \frac{n!}{r!} \sim \frac{n^n e^{-n}}{\sqrt{2\pi n}} \geq \left\lceil e, \frac{3^n}{n} \right\rceil$
 $e_1 = \text{const}$

$\lambda_{\text{сокр.}}(n)$ - минимум ~~среди~~ сокр. ДНФ
 Ф-ция Шеннона: $\lambda(n) = \max_{f \in P_2(n)} \lambda(f) = \max_{f \in P_2(n)} \lambda(f)$
 где $\lambda(f) = \lambda(\text{Фсокр.})$

Определение функционалов $\lambda(f)$ и $R(f)$ для длины и ранга ДНФ ФАЛ f соответственно, функций Шеннона $\lambda(n)$ и $R(n)$ у ФАЛ от n БП. Формулировка утверждений о поведении этих функций Шеннона, а также типичных значений указанных функционалов для почти всех ФАЛ.

№2.

Число ЭК в ДНФ A наз. её рангом и обозн. через $\lambda(A)$

$$R(f) = \min_{\substack{\text{ДНФ с } f \\ \text{реал. } f}} R(A) \quad R(n) = \max_{f \in P_2(n)} R(f)$$

$$\lambda(f) = \min_{\substack{\text{ДНФ с } f \\ \text{реал. } f}} \lambda(A) \quad \lambda(n) = \max_{f \in P_2(n)} \lambda(f)$$

Для $\forall n \in \mathbb{N}$ имеют место соотн.

$$\lambda(n) = 2^{n-1}, \quad R(n) = n \cdot 2^{n-1}$$

Для почти всех ФАЛ $f, f \in P_2(n)$,
вып. мер-ва: $\lambda(f) \leq \frac{3}{4} 2^{n-1} (1 + O(n \cdot 2^{-n/2}))$
 $R(f) \leq \frac{3}{4} \cdot n \cdot 2^{n-1} (1 + O(n \cdot 2^{-n/2}))$

Определение функции Шеннона $\lambda(n)$ и $R(n)$ для длины кратчайших и ранга минимальных ДНФ соответственно, реализующих ФАЛ от n БП. Поведение функций Шеннона $\lambda(n)$ и $R(n)$. Получение верхних оценок $\lambda(n)$ и $R(n)$ на основе специальной ДНФ и пример ФАЛ, на которой достигается нижние оценки этих функций Шеннона (с обоснованием).

Длина λ ДНФ — число ЭК в ней, ранг R ДНФ — число букв БП в ней.

$$\lambda(f) = \min_{A-\text{ДНФ для } f} \lambda(A), \quad R(f) = \min_{A-\text{ДНФ для } f} R(A)$$

Функции Шеннона:

$$\lambda(n) = \max_{f \in P_2(n)} \lambda(f), \quad R(n) = \max_{f \in P_2(n)} R(f).$$

Поведение функций Шеннона:

Лемма 7.1. Для любого $n, n \in \mathbb{N}$, имеют место соотношения

$$\lambda(n) = 2^{n-1}, R(n) = n \cdot 2^{n-1}.$$

Нижняя оценка:

возьмем линейную ФАЛ $l_n = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$; т.к. единственной ДНФ для l_n является ее совершенная ДНФ, то: $\lambda(n) = 2^{n-1}$, $R(n) = n \cdot 2^{n-1}$.

Верхняя оценка:

возьмем произвольную ФАЛ $f \in P_2(n)$; разложим ее по БП $x_2, \dots, x_n$:
После приведения подобных остается ДНФ длины не больше, чем 2^{n-1} .

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_2, \dots, \sigma_n)} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n} \cdot \begin{cases} 1 \\ 0 \\ x_1 \\ \bar{x}_1 \end{cases}$$

Определение функции Шеннона $\tau(n)$ и $\mu(n)$ для числа тупиковых и числа минимальных ДНФ у ФАЛ от n БП, их нижние оценки и пример ФАЛ, на которой указанные оценки достигаются (с обоснованием этой достижимости).

Функции Шеннона:

$\mu(f)$ - число минимальных ДНФ у функции f ,

$\tau(f)$ - число тупиковых ДНФ у функции f ,

$$\mu(n) = \max_{f \in P_2(n)} \mu(f),$$

$$\tau(n) = \max_{f \in P_2(n)} \tau(f).$$

Нижние оценки:

$$\tau(n) \geq 5^{2^{n-4}}, \mu(n) \geq 2^{2^{n-4}}.$$

Пример достижимости нижней оценки:

Лемма 8.1. Число тупиковых (минимальных) ДНФ у ФАЛ f из $P_2(n)$, $n \geq 4$, вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, x_3) \cdot (x_4 \oplus \dots \oplus x_n),$$

где $\overline{N}_g = \{(000), (111)\}$, равно $5^{2^{n-4}}$ (соответственно $2^{2^{n-4}}$).

Доказательство. Из свойств линейной ФАЛ и свойств ФАЛ g вытекает, что (см. §1 и §4) любая простая импликанта K ФАЛ f имеет вид

$$K = K_i(x_1, x_2, x_3) \cdot x_4^{\beta_4} \dots x_n^{\beta_n},$$

где K_i , $i = 1, \dots, 6$, — простая импликанта ФАЛ g (см. рис. 2.2а и (2.10)) и $\beta_4 \oplus \dots \oplus \beta_n = 1$. Таким образом, сокращенная ДНФ ФАЛ f с «геометрической» точки зрения состоит из 2^{n-4} циклов длины 6 (см. §4). Следовательно, любая тупиковая (минимальная) ДНФ ФАЛ f включает в себя одно из пяти (соответственно двух) реберных покрытий, связанных с тупиковыми (соответственно минимальными) ДНФ ФАЛ g , приведенными в (4.1)–(4.2) (соответственно (4.1)), для каждого из 2^{n-4} указанных циклов. Поэтому число тупиковых (минимальных) ДНФ ФАЛ f равно $5^{2^{n-4}}$ (соответственно $2^{2^{n-4}}$).

Лемма доказана. □

Дать определение окрестности порядка r , $r = 0, 1, \dots$, максимальной грани N_K ФАЛ f . Указать (с обоснованием) порядок такой окрестности этой грани, знание которой позволяет однозначно ответить на вопрос о вхождении N_K в ДНФ $\cap T$ и ДНФ ΣT ФАЛ f .

№4. Для каждой макс. грани N ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ положим $S_0(N, f) = \{N\}$, а затем по индукции по r , $r = 1, 2, \dots$, определим им-во всех тех макс. граней ФАЛ f , которые имеют непустое пересечение хотя бы с одной гранью из $S_{r-1}(N, f)$. $S_r(N, f)$ - окрестность порядка r грани N ФАЛ f .

• N_K -ядр. грань ФАЛ $f \Leftrightarrow$ она не покрыв. всеми остальными макс. гр.

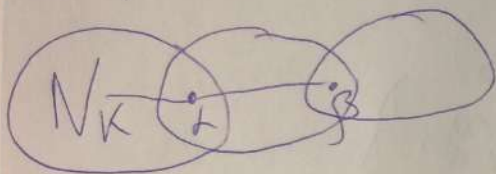
Поскольку грани, не вход. в $S_1(N_K, f)$, не имеют общих точек с N_K , грань N_K явл. ядровой $\Leftrightarrow$ она не покр. всеми остал. гранями из $S_1(N_K, f)$.

Все грани гурка $\Pi_\alpha(f)$ входят в $S_1(N_K, f)$, а все грани $\Pi_\beta(f)$ в $S_2(N_K, f)$, если $\Pi_\alpha(f) \cap \Pi_\beta(f) \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ вопрос о вхождении ПИ К ФАЛ f в ДНФ $\cap T$ (ДНФ ΣT) этой ФАЛ можно решить, рассматр. окрестность $S_1(N_K, f)$ ($S_2(N_K, f)$)

1) $K \in \text{ДНФ} \cap T \text{ ФАЛ } f \Leftrightarrow N_K\text{-ядр. грань} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists \alpha \in N_K: \Pi_\alpha(f) = \{N_K\} \Rightarrow$ достаточно
 окр-ти $S_1(N_K, f)$

2) $K \in \text{ДНФ} \Sigma T \text{ ФАЛ } f \Leftrightarrow N_K$ не явл.-се
 регулярной $\Leftrightarrow \exists \alpha \in N_K: \forall \beta \in N_f \setminus N_K$
 $\Pi_\beta(f) \not\subseteq \Pi_\alpha(f) \Rightarrow$ достаточно
 окр-ти $S_2(N_K, f)$



Определение окрестности (максимальной) грани ФАЛ, локальность критериев вхождения простых импликант в ДНФ $\cap T$ и ДНФ ΣT . Теорема Ю.И. Журавлева о ДНФ суммы минимальных; пример цепных ФАЛ, и их общей простой импликанты, на которых указанные в теореме соотношения выполняются при $n = 5$.

ФАЛ f в ее ДНФ $\cap T$ и ДНФ ΣT (см. [28, 22, 23, 16]). Для каждой максимальной грани N ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ положим $S_0(N, f) = \{N\}$, а затем индукцией по r , $r = 1, 2, \dots$, определим множество $S_r(N, f)$ как множество всех тех максимальных граней ФАЛ f , которые имеют непустое пересечение хотя бы с одной гранью из $S_{r-1}(N, f)$. При этом множество $S_r(N, f)$ будем называть окрестностью порядка r грани N функции f .

Докажем, что вопрос о вхождении простой импликанты K ФАЛ f в ДНФ $\cap T$ (ДНФ ΣT) этой ФАЛ можно решить, рассматривая окрестность $S_1(N_K, f)$ (соответственно $S_2(N_K, f)$). Действительно, грань N_K является ядровой гра-

Теорема 8.1 (ср. [6, 23, 10]). При любом $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, в $P_2(n)$ существуют ФАЛ f' и f'' , имеющие общую простую импликанту K , которая входит в ДНФ ΣM одной, но не входит в ДНФ ΣM другой из этих ФАЛ и для которой $S_{n-3}(N_K, f') = S_{n-3}(N_K, f'')$.

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется цепной (циклической) функцией длины t , если ее сокращенная ДНФ с «геометрической» точки зрения представляет собой цепь (соответственно цикл) из t последовательно соединенных ребер $N_1, N_2, \dots, N_t$ куба B^n (см. рис. 8.1a и 8.1b). Заметим, что циклическая

(30) $n=5 \Rightarrow S_2(N_K, f') = S_2(N_K, f'')$

$f: N_1 = \{ (0,0,0,0,1); (0,0,0,1,1); (0,0,1,1,1); (0,1,1,1,1); (1,1,1,1,1); (1,1,1,1,0); (1,1,1,0,0); (1,1,0,0,0); (1,0,0,0,0) \}$

цепн. длины 2n-2 $\Rightarrow f'(x_n) \Rightarrow N_{f'} = N_f \setminus \{2^{(n)}\} = f'(x_n)$

$N_{f''} = N_f \setminus \{2^{(n)}\} = f''(x_n)$

Дав, что у f' и f'' единств. мин. ДНФ и эти мин. ДНФ не имеют общих мин. граней $\Rightarrow K = x_1 x_2 x_3 x_4$

Определение цепной ФАЛ и особенности ее минимальных ДНФ. Формулировка теоремы Ю.И. Журавлева о ДНФ суммы минимальных; пример цепной ФАЛ, на которой указанное в теореме соотношение выполняется и его обоснование.

Определим ДНФ сумма минимальных ФАЛ f (ДНФ ΣM ФАЛ f) как дизъюнкцию всех тех её простых импликант, которые входят хотя бы в одну минимальную ДНФ ФАЛ f .

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется цепной (циклической) функцией длины t , если ее сокращенная ДНФ с «геометрической» точки зрения представляет собой цепь (соответственно цикл) из t последовательно соединенных ребер $N_1, N_2, \dots, N_t$ куба B^n (см. рис. 8.1a и 8.1b). Заметим, что циклическая

ДНФ ΣT совпадает с сокращенной ДНФ. При этом цепная ФАЛ f нечетной длины $t = 2k - 1 \geq 3$ имеет единственную минимальную ДНФ, которая совпадает с ее ДНФ ΣM и соответствует покрытию (см. рис. 8.1a) $N_1 \cup N_3 \cup \dots \cup N_t$ длины k . Действительно, множество N_f в данном случае состоит из

Теорема 8.1 (ср. [6, 23, 10]). При любом $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, в $P_2(n)$ существуют ФАЛ f' и f'' , имеющие общую простую импликанту K , которая входит в ДНФ ΣM одной, но не входит в ДНФ ΣM другой из этих ФАЛ и для которой $S_{n-3}(N_K, f') = S_{n-3}(N_K, f'')$.

$f^{(21)}(x_n): N_f = \{ \overbrace{(000 \dots 01)}^{\alpha_1}, (000 \dots 11), \dots, (011 \dots 11), \underbrace{(100 \dots 00)}_{\alpha_2} \}$
 цепн. е. $2n-2$ $\Rightarrow$ покажем вып. соотн.

$N_{f_1} = N_f \setminus \{\alpha_1\}; N_{f_2} = N_f \setminus \{\alpha_2\}$ - цепн. с длин. $2n-3$
 $f_1(x_n) \quad f_2(x_n)$

f_1, f_2 - очев., что каждой из них - единств. мин. ДНФ и эти мин. ДНФ не имеют общих мин. граней, расщ. общ. макс. грань N_K где: $K = x_1 \dots x_{n-1} \Rightarrow S_{n-3}(N_K, f_1) = S_{n-3}(N_K, f_2)$, при $n \geq 3$, но K вход. равно в одну из 2 мин. ДНФ f_1 и $f_2 \Rightarrow$ показано упр. конструктивно.

Индуктивное определение формулы-слова в базисе $B_0 = \{x_1 \vee x_2, x_1 \& x_2, \bar{x}_1\}$ и реализуемой ею ФАЛ, построение дерева и квазидерева, соответствующего данной формуле. Основные функционалы сложности формул (ранг, сложность, глубина), утверждение о соотношениях между ними. Эквивалентность формул и верхняя оценка числа попарно не эквивалентных формул с заданной сложностью (глубиной) в базисе B_0 .

Пусть, по-прежнему, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ — счетный упорядоченный алфавит входных БП и пусть $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_b\}$ — базис, где ФАЛ φ_i , $i = 1, \dots, b$, зависит от k_i , $k_i \geq 1$, БП и является существенной ФАЛ, если $k_i \geq 2$. Предполагается, что B — полный базис (см. §1 главы 1) и допускается, в общем случае, наличие в нем равных ФАЛ. Чаще всего мы будем иметь дело с базисом $B_0 = \{\&, \vee, \neg\}$.

Любая переменная x_j из X считается *формулой глубины 0* или, иначе, *тривиальной формулой над базисом B* , которая реализует функцию x_j . Если $i \in [1, b]$ и для каждого j , $j \in [1, k_i]$, определена формула $\mathcal{F}_j$ глубины q_j над B , которая реализует ФАЛ φ_i , то запись $\mathcal{F}$ вида

$$\mathcal{F} = \varphi_i(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k_i}) \quad (2.1)$$

является *формулой глубины q над B* , где

$$q = \max\{q_1, \dots, q_{k_i}\} + 1, \quad (2.2)$$

которая реализует функцию f вида $f = \varphi_i(f_1, \dots, f_{k_i})$.

Все записи, полученные в результате указанного индуктивного построения, и только они считаются *формулами над базисом B* . При этом формулы, полученные в процессе индуктивного построения формулы $\mathcal{F}$, называются ее *подформулами*, а те подформулы $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k_i}$, из которых на последнем шаге индуктивного построения строится формула $\mathcal{F}$ вида (2.1), считаются ее *главными подформулами*.

Заметим, что запись подформулы $\mathcal{F}'$ формулы $\mathcal{F}$ является частью записи $\mathcal{F}$, причём каждая такая часть считается *вхождением $\mathcal{F}'$ в $\mathcal{F}$* или, иначе, *позиционной подформулой вида $\mathcal{F}'$ формулы $\mathcal{F}$* , а число указанных частей называется *кратностью $\mathcal{F}'$ в $\mathcal{F}$* . Под *сложностью (рангом)* формулы $\mathcal{F}$ понимается число вхождений в нее функциональных символов (соответственно символов переменных), которое обозначается через $L(\mathcal{F})$ (соответственно $R(\mathcal{F})$).

Напомним, что «графически» совпадающие формулы считаются *изоморфными*, а формулы $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$, реализующие равные функции f' и f'' , называются *равными* или, иначе, *эквивалентными*. При этом равенство вида $t : \mathcal{F}' = \mathcal{F}''$ считается *тождеством*. Через t_φ^K и t_φ^A будем обозначать тождество коммутативности и тождество ассоциативности для ФАЛ $\varphi(x_1, x_2)$, где $\varphi \in \{x_1 \cdot x_2, x_1 \vee x_2, x_1 \oplus x_2, x_1 \sim x_2\}$ (см. §2 главы 1).

Множество всех формул над базисом B будем обозначать через $\mathcal{U}_B^\Phi$ и положим $\mathcal{U}_{B_0}^\Phi = \mathcal{U}^\Phi$. Индукцией по глубине любой формуле глубины q над B можно сопоставить упорядоченное ориентированное корневое дерево глубины q , каждому листу которого приписана БП из X , а каждой внутренней вершине — функциональный символ (ФС) из B . Формуле x_j глубины 0 сопоставим «тривиальное» дерево с единственной вершиной, являющейся корнем и листом одновременно, которой приписана БП x_j (см. рис. 2.1а). Формуле $\mathcal{F}$ вида (2.1) сопоставим дерево $\mathcal{D}$ глубины q , определяемой равенством (2.2), и с корнем v , показанное на рис. 2.1б, где $\mathcal{D}_j$, $j = 1, \dots, k_i$ — дерево глубины q_j с корнем v_j , которое соответствует формуле $\mathcal{F}_j$.

Лемма 2.1. Для формулы $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{U}^\Phi$, выполняются неравенства

$$R(\mathcal{F}) = L_{\&, \vee}(\mathcal{F}) + 1 \leq L(\mathcal{F}) + 1 \leq 2^{D(\mathcal{F})}, \quad (2.4)$$

где $L_{\&, \vee}(\mathcal{F})$ — число ФС $\&$ и $\vee$ в формуле $\mathcal{F}$.

Лемма 4.2. Для любых натуральных n , L , D выполняются неравенства

$$|\mathcal{U}^\Phi(L, n)| \leq (10n)^{L+1}, \quad (4.3)$$

$$\|\mathcal{U}^\Phi(L, n)\| \leq (8n)^{L+1}, \quad (4.4)$$

$$\|\mathcal{U}^\Phi[D, n]\| \leq (8n)^{2^D}. \quad (4.5)$$

$\|\mathcal{U}\|$ — число попарно не эквивалентных схем в $\mathcal{U}$.

Псевдограф, получаемый из дерева G_F отождествлением всех истоков с одинаковыми пометками, называется квазидеревом $\hat{G}_F$ формулы F .

Канонический вид формул базиса B_0 ; утверждение о приведении формул к каноническому виду с помощью основных тождеств и его этапы.

№4

Произв. конъюнкц. букв, соединяя, в общем сл-е, повт. или против. буквы, будем наз. обобщ. ЭК (ОЭК), а дизъюнкцию таких конъюнкций, соединяя, в общ. сл-е, повт. "слагаемые" - обобщ. ДНФ. Обычную ЭК (ДНФ) и формулу $x_i, \bar{x}_i$ будем считать канонической ОЭК (сооб. канон. ОДНФ)

Л. 3.2.
 $\forall$ ф-лу $F(x_1, \dots, x_n)$ реализ. ФАП $\neq$ с помощью ЭП на осн. системы тождеств так можно преобр. в сов. ОДНФ ФАП $\neq$ от БП $X(n)$.

Этапы:

$$F \xrightarrow{\tau^M} F' \xrightarrow{\{t_{\&, \vee}^D, t_{\&}^k\}} F'' \xrightarrow{\{\tau^A, \tau^K, \tau^{ПК}, \tau^{П}, \tau^{ОП}\}} \hat{F} \xrightarrow{\{t_{\&, \vee}^D, \tau^{ПП}\}} \tilde{F}$$

Все стрелочки должны быть: $\Rightarrow$

$F \rightarrow F'$ - поднятие отрицаний;

$F' \rightarrow F''$ - раскрытие скобок;

$F'' \rightarrow \hat{F}$ - приведение подобных (ОЭК в каноническую ОЭК, устранения повторных вхождений равных ЭК или подформул $x_1 \cdot \bar{x}_1$, поглощение ЭК);

$\hat{F} \rightarrow \tilde{F}$ - увеличение размерности ЭК до n при помощи $t_{1, \&}^{ПК}$, устраняются повторные вхождения слагаемых;

Канонический вид формул в базисе $B_0 = \{x_1 \cdot x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$ и этапы ЭП на основе системы $\tilde{\tau}_{\text{осн}}$, которое приводит произвольную формулу над B_0 к каноническому виду, с указанием особенностей формул, получаемых на каждом из них. Определение полной системы тождеств и утверждение о полноте системы основных тождеств, идея его доказательства.

СМОТРИ ПРЕДЫДУЩИЙ ВОПРОС

Система тождеств τ – полная $\Leftrightarrow$ для любых двух эквивалентных формул F_1 и F_2 из $\mathcal{U}_B^\Phi$ имеет место выводимость $F_1 \Rightarrow F_2$.

Ув. 8.1 Система $\tilde{\tau}^{\text{осн}}$ выводима из системы $\tau^{\text{осн}}$

Идея док-ва*

1) $\{t_x^H, t_v^H\} \Rightarrow t_v^H$

$$x_1 \vee x_2 \xrightarrow[t_7^H]{t_7^H} \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \xrightarrow[t_8^H]{t_8^H} \overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2} \xrightarrow[t_7^H]{t_7^H} \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$$

2) $\tau^H \cup \{t_x^K\} \Rightarrow t_v^K$

$$x_1 \vee x_2 \xrightarrow[t_7^H]{t_7^H} \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \xrightarrow[t_6^H]{t_6^H} \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \xrightarrow[t_2^K]{t_2^K} \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_1 \xrightarrow[t_8^H]{t_8^H} \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \xrightarrow[t_7^H]{t_7^H} x_2 \vee x_1$$

3) абсолютно аналогично выводим из $\tau^{\text{осн}}$ тождества $t_v^A, t_v^{\text{он}}, t_{vk}^{\text{ок}}, t_{ov}^{\text{ок}}, t_{vv}^{\text{ок}}$

4) $\tau^{\text{осн}} \Rightarrow t_v^H$

$$x_1 \vee x_1 x_2 \xrightarrow[t_{18}^{\text{ок}}]{t_{18}^{\text{ок}}} x_1 (x_2 \vee \bar{x}_2) \vee x_1 x_2 \xrightarrow[t_{3v}^{\text{он}}]{t_{3v}^{\text{он}}} x_1 ((x_2 \vee \bar{x}_2) \vee x_2) \xrightarrow[t_v^A, t_v^K]{t_v^A, t_v^K} x_1 \cdot (x_2 \vee x_2 \vee \bar{x}_2) \xrightarrow[t_v^{\text{он}}]{t_v^{\text{он}}} x_1 \cdot (x_2 \vee \bar{x}_2) \xrightarrow[t_{18}^{\text{ок}}]{t_{18}^{\text{ок}}} x_1$$

Определение подобных формул, формул с поднятыми отрицаниями и их альтернирования; формулировка утверждения об оптимизации подобных формул по глубине.

Формулы из $\mathcal{U}^{\vee}$ получ. из друг из друга экв. преобраз. на осн. тождеств $\perp_k$ и $\perp_v$, а также тождеств $\perp_k^A, \perp_v^A$ - наз. подобными.

Форм-ла в кот. все ФС $\neg$ встр. только над БП, наз. форм-лой с поднятыми отрицаниями.

Альтернирование $\text{Alt}(\mathcal{F})$ форм-лы $\mathcal{F}$ с поднятыми отр. - макс. число изменений типов ФС $\&$ и $\vee$ в узлах дерева, соотв. формуле $\mathcal{F}$.

Альтерн. ЭК или ЭД = 0, а $\forall$ (отл. от ЭК и ЭД) ДНФ или КНФ = 1.

Для $\forall$ форм-лы $\mathcal{F}$ с поднятыми отрицаниями из $\mathcal{U}^{\vee}$ $\exists$ подобная ей

$$\mathcal{F}: D(\mathcal{F}) \leq \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil + \text{Alt}(\mathcal{F})$$

$\Rightarrow$ где $\forall$ ЭК или ЭД $\exists$ подобная форм-ла $\mathcal{K}: D(\mathcal{K}) = \lceil \log(L(\mathcal{K}) + 1) \rceil$, кот. минимальная по глубине.

$\Rightarrow$ где $\forall$ ДНФ или КНФ $\exists$ подобная ей ф-ла $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \leq \lceil \log(L(\mathcal{A}) + 1) \rceil + 1$.

Определение основных функционалов сложности сложности СФЭ (ранг, сложность, глубина), понятие «висячей» вершины и приведенной СФЭ. Утверждение о соотношениях между сложностью, рангом и глубиной приведенной СФЭ с одним выходом в стандартном базисе. Верхняя оценка числа попарно неэквивалентных СФЭ с входами $x_1, \dots, x_n$ выходом z_1 и сложности не более L .

$L(\Sigma)$ - сложность Σ , т.е. число всех её ФЭ.

$D(\Sigma)$ - глубина Σ , т.е. макс. глубина её вершин.

$R(\Sigma)$ - ранг Σ , т.е. число дуг, исходящих из её входов.

Верш. СФЭ наз. висячей, если она явл. стоком, но не явл. выходом системы.

Схема наз. приведенной, если в ней нет висячих вершин.

Для приведенной СФЭ $\Sigma, \Sigma \in \mathcal{U}^c$, с одним выходом, вып. мер-ва:

$$R(\Sigma) \leq L_{\&,v}(\Sigma) + 1 \leq L(\Sigma) + 1$$

$$\leq 2^{D(\Sigma)},$$

где $L_{\&,v}$ - число ФЭ $\&$ и v в Σ .

Для $\forall n, L \in \mathbb{N} : \|\mathcal{U}^c(L, n)\| \leq (8(L+n))^{L+n}$

Определение основных функционалов сложности формул и СФЭ (ранг, сложность, глубина), их содержательный смысл. Утверждение о соотношениях между сложностью, рангом и глубиной формул в стандартном базисе, идея его доказательства. Формулировка аналогичного утверждения для СФЭ.

$L(\Sigma)$ - сложность СФЭ Σ - число всех её ФЭ (ФС)
 (формулы $\mathcal{F}$)
 $D(\Sigma)$ - глубина СФЭ Σ - макс. глубина её вершин
 (формулы $\mathcal{F}$) (определяется индуктивно)
 $R(\Sigma)$ - ранг СФЭ Σ - число дуг, исходящих из её вершин
 (формулы $\mathcal{F}$) (символов логических)

Утв. Для φ -ии $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{U}^{\varphi}$, вып. нер-ва:

$$R(\mathcal{F}) = L_{\&, \vee}(\mathcal{F}) + 1 \leq L(\mathcal{F}) + 1 \leq 2^{D(\mathcal{F})}$$

$L_{\&, \vee}(\mathcal{F})$ - число $\&, \vee$ в φ -ии $\mathcal{F}$.

Док-во: (1) считывая число рёбер, вход. в вершины дерева $\mathcal{F}$,
 с числом рёбер, выходящих из его вершин, получим:

$$|E(\mathcal{F})| = 2L_{\&, \vee}(\mathcal{F}) + L_{\neg}(\mathcal{F}) = L(\mathcal{F}) + R(\mathcal{F}) - 1,$$

$L_{\neg}(\mathcal{F})$ - число $\neg$ в φ -ии $\mathcal{F}$

$\Downarrow$

$$R(\mathcal{F}) = L_{\&, \vee}(\mathcal{F}) + 1$$

(2) легко устанавливается индукцией по $D(\mathcal{F})$

Утв. Для приведённой СФЭ Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}^c$, с одним вх., вып. нер-ва:

$$R(\Sigma) \leq L_{\&, \vee}(\Sigma) + 1 \leq L(\Sigma) + 1 \leq 2^{D(\Sigma)},$$

$L_{\&, \vee}(\Sigma)$ - число ФЭ $\&, \vee$ в Σ .

Определение структуры СФЭ в базисе $\{x_1 \vee x_2, x_1 \sim x_2, \bar{x}_1\}$ как помеченного графа специального вида, определение ФАЛ, реализуемой в вершине СФЭ, и системы ФАЛ, реализуемой этой СФЭ. Определение висячей вершины и приведенной СФЭ.

СФЭ $B = \{f_1, \dots, f_n\}$ - базис, $f_i = f_i(y_1, \dots, y_k)$ $i=1, \dots, n$
 По схеме функциональных элементов (СФЭ) над базисом B понимается всякий ^{упоряд.} псевдограф без оринок (контуров), в котором:
 1) каждой истоку (вершине, в кот. не входят дуги) приписывается символ входной переменной (из вх. алфавита переменных $X = \{x_1, \dots, x_n\}$).
 При этом различным вершинам приписаны символы различных БП, истоки считаются входами схемы.
 2) каждой вершине v , отличной от истока, приписан некоторый ФС $f \in B$, при этом количество входов вершины v должно быть равно числу аргументов БФ f , порядок входов $d_1, \dots, d_k$ в v соотв. порядку аргумента; каждая такая вершина считается функциональным элементом.
 3) некоторые вершины обозначены выходными вершинами СФЭ, - им приписаны символы выходных переменных (из вх. алфавита переменных $Z = \{z_1, \dots, z_m\}$), при этом одна переменная упоминается не более одного раза.
 Входы (выходы) БП СФЭ упорядочены линейно.
 Упорядочен по глубине вершины v в СФЭ Z с n входами $x_1, \dots, x_n$ и m выходными переменными $z_1, \dots, z_m$ определён БФ $f_v(x_1, \dots, x_n)$, реализуемой в вершине v . Если глубина v есть 0, то v - исток, f_v приписан символ БП $x_i \Rightarrow f_v(x) = x_i$. Пусть теперь для каждой вершины v глубины $d-1$ БФ $f_v(x)$ определена.
 4) вершине v глубины d . Пусть этой вершине приписан ФС $f = f(y_1, \dots, y_k) \in B$ и пусть в v входят дуги из вершин $v_1, \dots, v_k$.

в этом порядке тогда $f_v(x) = f(f_{v_1}(x), \dots, f_{v_k}(x))$

Вершина v с нулевой степенью исхода - висячая в СФЭ Z $\Leftrightarrow v$ не явл. выходной вершиной Z .

Схема наз. приведённой, если в ней нет висячих вершин.

Операция удаления висячей вершины предполагает удаление самой висячей вершины и всех входящих в неё дуг.

Описание ЭП, связанного с тем этапом приведения формулы над базисом $B_0 = \{x_1 \cdot x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$ к каноническому виду, на котором произвольная ДНФ, реализующая ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n) \neq 0$, преобразуется в совершенную ДНФ ФАЛ f (с указанием того, какие группы основных тождеств и каким образом при этом используются).

Переход от ДНФ $\hat{F}$, реализующей ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n) \neq 0$, к сов. ДНФ $\tilde{F}$ выполняется в два этапа. Сначала каждая ЭК $\hat{K}$ из $\hat{F}$, которая имеет ранг r , где $r = n - q < n$, и не содержит букв БП $x_{i_1}, \dots, x_{i_q}$, приводится к ее совершенной ДНФ $\tilde{K}$ от БП $X(n)$ в результате следующего ЭП:

$$\hat{K} \xrightarrow[t_{1,\&}^{\text{ПК}}]{} \hat{K}(x_{i_1} \vee \bar{x}_{i_1}) \cdots (x_{i_q} \vee \bar{x}_{i_q}) \xrightarrow[t_{\&,\vee}^D]{} \tilde{K}$$

Затем в полученной ОДНФ устраняются повторные вхождения равных элементарных конъюнкций или подформулы $x_1 \cdot \bar{x}_1$ с помощью тождеств $\{\tau^A, \tau^K, \tau_V^{\text{ОП}}\}$, и затем устраняются ОЭК $x_1 \cdot \bar{x}_1$ с помощью тождеств $\{t_V^A, t_V^K, t_{0,V}^{\text{ПК}}\}$. В результате приходим к сов. ДНФ $\tilde{F}$.

Описать ЭП произвольной ДНФ, реализующей ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n) \neq 0$, в совершенную ДНФ ФАЛ f , указав какие группы основных тождеств и каким образом при этом используются.

Переход от ДНФ $\hat{F}$, реализующей ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n) \neq 0$, к сов. ДНФ $\tilde{F}$ выполняется в два этапа. Сначала каждая ЭК $\hat{K}$ из $\hat{F}$, которая имеет ранг r , где $r = n - q < n$, и не содержит букв БП $x_{i_1}, \dots, x_{i_q}$, приводится к ее совершенной ДНФ $\tilde{K}$ от БП $X(n)$ в результате следующего ЭП:

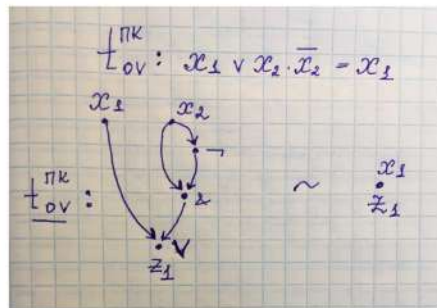
$$\hat{K} \xrightarrow[t_{1,\&}^{\text{ПК}}]{} \hat{K}(x_{i_1} \vee \bar{x}_{i_1}) \cdots (x_{i_q} \vee \bar{x}_{i_q}) \xrightarrow[t_{\&,\vee}^D]{} \tilde{K}$$

Затем в полученной ОДНФ устраняются повторные вхождения равных элементарных конъюнкций или подформулы $x_1 \cdot \bar{x}_1$ с помощью тождеств $\{\tau^A, \tau^K, \tau_V^{\text{ОП}}\}$, и затем устраняются ОЭК $x_1 \cdot \bar{x}_1$ с помощью тождеств $\{t_V^A, t_V^K, t_{0,V}^{\text{ПК}}\}$. В результате приходим к сов. ДНФ $\tilde{F}$.

Определение подсхемы данной СФЭ, принцип эквивалентной замены. Определение тождества для СФЭ и его подстановки. Моделирование формульных тождеств в классе СФЭ на примере $t_{ov}^{ПК}$. Описание однократного и многократного ЭП СФЭ с помощью тождеств, понятие полной системы тождеств для ЭП СФЭ.

СФЭ Σ , с ил-вами вершин и дуг (V, E) и пометками на вершинах зв. подсхемы СФЭ $\Sigma - (V, E) - \rightarrow$ $\Leftrightarrow$
 $V, E \in E$, если на вершине $v \in V$ имеются пометки в Σ ,
 то такие же пометки у вершинки $v \in \Sigma$, и $\forall w$ СФЭ Σ , в кот.
 уходит (и кот. исходит) в Σ дуга, не лежащая в Σ , сплается
 в Σ , входом (выходом); пометки ФС на вершинах зв. входных
 в Σ , но не в Σ , следует при этом опускать.

Подстановка в СФЭ опускает только переименование входов с
 безменным отождествлением и переименованием выходов с безм.
 дублированием (добавлением к вершине новой выходной переим.)
 и снятием выходов (удалением символов выходных переменных)
 Подстановка в тождество $t: \Sigma_1 \sim \Sigma_2$ - одинаковые подстановки
 в Σ_1 и Σ_2 .
 Аналогично случаю формул вводится понятие однократной и
 многократной выводимости ЭП, ПСТ, КПСТ $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$ СФЭ
 Принцип эквивалентной замены: при замене в СФЭ Σ подсхемы
 Σ_1 на зв. подсхему Σ_2 получается СФЭ $\hat{\Sigma}$, экв. схеме Σ



Принцип эквивалентной замены: при замене в СФЭ Σ ее подсхемы Σ' на эквивалентную ей подсхему Σ'' получается СФЭ эквивалентная Σ .

При этом будем считать, что полученная СФЭ возникла в результате однократного ЭП на основе тождества $t: \Sigma' = \Sigma''$, где $\tilde{\Sigma}'$ и $\tilde{\Sigma}''$ получены из Σ' и Σ'' соответственно в результате подстановки.

Последовательность однократных ЭП на основе некоторой системы тождеств τ – многократное ЭП на основе τ .

Система тождеств τ – полная $\Leftrightarrow$ для любых двух эквивалентных СФЭ Σ_1 и Σ_2 из $\mathcal{U}_B^C$ имеет место выводимость $\Sigma_1 \Rightarrow \Sigma_2$.

Опр. Подсхема (ФЭ) $\Sigma' \subseteq \Sigma$

а) $V(\Sigma') \subseteq V(\Sigma)$, $E(\Sigma') \subseteq E(\Sigma)$

б) $\forall$ входная вершина Σ из $V(\Sigma')$ - вход Σ'

$\forall$ вершина Σ' без входящих дуг - вход Σ'

$\forall$ входная верш. Σ из $V(\Sigma')$ - вход Σ'

$\forall$ вершина Σ' являющаяся начальной верш. дуги из $E(\Sigma) \setminus E(\Sigma')$ - вход Σ'

в) + можем объявлять входами некоторые дуг. вершины

Функция эквив. замены Если из $\tilde{\Sigma}$ путём замены её подсхемы Σ' на Σ'' получили схему Σ то $\tilde{\Sigma} \sim \Sigma$.

• Эквивалентность $\Sigma' \sim \Sigma''$ записывается в виде тождества

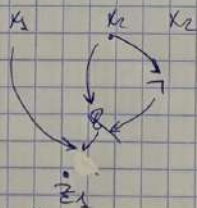
$$\theta: \Sigma' \sim \Sigma''$$

• Подстановка - ряд "простых" преобр-ий к Ф. или или схемам, сохраняющих их эквивалентность

• Тождество, полученное в результате применения одного и того же подстановки к $\theta: \Sigma' \sim \Sigma''$ (к обоим частям) наз-ся подстановкой тождества θ и обозн $\hat{\theta}: \hat{\Sigma}' \sim \hat{\Sigma}''$.

пк $\theta_{0,1} \quad K_1 V(K_2 \cdot K_2) = K_1$

пк $\theta_{0,1}$

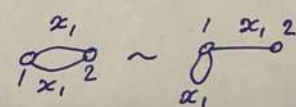


Опр. $\Sigma \xrightarrow[\theta]{\nu} \tilde{\Sigma}$ - однокр эквив. преобр. схема Σ в $\tilde{\Sigma}$ с помощью тождества $\theta: \Sigma \sim \tilde{\Sigma}$;

$\Sigma \xrightarrow[\theta]{\nu} \tilde{\Sigma}$ - многократное ЭП...

Опр. θ -полная система тождеств для ЭП над базисом B , если для $\forall$ двух $\Sigma' \sim \Sigma''$ над B имеет место выводимость $\Sigma' \vdash \Sigma''$.

Определение подсхемы заданной КС из неориентированных контактов с неразделенными полюсами, принцип эквивалентной замены. Определение тождества для КС из неориентированных контактов с неразделенными полюсами и его подстановки; описание указанной подстановки одного из основных тождеств, результатом которой является тождество для π -схем, моделирующее формульное тождество $x_1 \vee x_1 = x_1$ (с точностью до «висячего» цикла). Описание однократного и многократного ЭП КС с помощью тождеств, понятие полной системы тождеств для ЭП КС.

КС Σ' — подсхема КС $\Sigma \xLeftrightarrow{\text{def}} V(\Sigma') \subset V(\Sigma)$
 $E(\Sigma') \subset E(\Sigma)$,
а полюсами Σ' все принадлежащие ей полюса КС Σ и все те ее вершины, кот. инцидентны в Σ ребрам из $E(\Sigma) \setminus E(\Sigma')$, и, возм., др. вершины.
Принцип эквивалентной замены:
 $\square$ подсхема $\hat{\Sigma}'$ схемы Σ эквивалентна схеме $\hat{\Sigma}''$,
тогда, замена $\hat{\Sigma}'$ в Σ схемой $\hat{\Sigma}''$, получим $\hat{\Sigma} \sim \Sigma$.
 $\square \Sigma' = \Sigma'(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m), \Sigma'' = \Sigma''(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$;
тогда справедливо тождество $t: \Sigma' \sim \Sigma''$ означает,
что $\forall i, j \in [1, m]$ ФАП проводимости от a_i к a_j в КС Σ'
равна ФАП проводимости от a_i к a_j в КС Σ'' .
Подстановка — переименование (с возм. отождествлением и инверт.) БП, а также переименование (с возм. отождествлением и снятием) полюсов.
Подстановка t_σ тождества t_σ : 
Однокр. ЭП: однокр. применение тождества t к схеме Σ ; обозн. $\Sigma \xrightarrow[t]{t} \hat{\Sigma}$
Многокр. ЭП: порожденность однокр. ЭП схемой Σ на основе тождеств из системы τ ;
обозн. $\Sigma \xrightarrow[\tau]{\text{м.к.}} \hat{\Sigma}$.
 τ — полная система тождеств для ЭП над базисом B , если $\forall \Sigma, \Sigma'', \Sigma' \sim \Sigma''$ над B имеет место выводимость: $\Sigma' \xrightarrow[\tau]{\text{м.к.}} \Sigma''$.

Определение подформулы данной формулы, принцип эквивалентной замены. Определение тождества для формул и его подстановки; описание указанной подстановки одного из основных тождеств, результатом которой является тождество $x_1x_2(x_3 \vee \bar{x}_4) = x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_4$. Описание однократного и многократного ЭП формул с помощью тождеств, понятие полной системы тождеств для ЭП формул в заданном базисе.

Пусть, по-прежнему, $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ — счетный упорядоченный алфавит входных БП и пусть $\mathcal{B} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_b\}$ — базис, где ФАЛ φ_i , $i = 1, \dots, b$, зависит от k_i , $k_i \geq 1$, БП и является существенной ФАЛ, если $k_i \geq 2$. Предполагается, что $\mathcal{B}$ — полный базис (см. §1 главы 1) и допускается, в общем случае, наличие в нем равных ФАЛ. Чаще всего мы будем иметь дело с базисом $\mathcal{B}_0 = \{\&, \vee, \neg\}$.

Любая переменная x_j из $\mathcal{X}$ считается *формулой глубины 0* или, иначе, *тривиальной формулой над базисом $\mathcal{B}$* , которая реализует функцию x_j . Если $i \in [1, b]$ и для каждого j , $j \in [1, k_i]$, определена формула $\mathcal{F}_j$ глубины q_j над $\mathcal{B}$, которая реализует ФАЛ f_j , то запись $\mathcal{F}$ вида

$$\mathcal{F} = \varphi_i(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k_i}) \quad (2.1)$$

является *формулой глубины q над $\mathcal{B}$* , где

$$q = \max\{q_1, \dots, q_{k_i}\} + 1, \quad (2.2)$$

которая реализует функцию f вида $f = \varphi_i(f_1, \dots, f_{k_i})$.

Все записи, полученные в результате указанного индуктивного построения, и только они считаются *формулами над базисом $\mathcal{B}$* . При этом формулы, полученные в процессе индуктивного построения формулы $\mathcal{F}$, называются ее подформулами, а те подформулы $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k_i}$, из которых на последнем шаге индуктивного построения строится формула $\mathcal{F}$ вида (2.1), считаются ее *главными* подформулами.

Принцип эквивалентной замены: при замене в формуле F ее подформулы F' на эквивалентную ей подформулу F'' получается формула эквивалентная F .

При этом будем считать, что полученная формула возникла в результате однократного ЭП на основе тождества $t : F' = F''$, где $\tilde{F}'$ и $\tilde{F}''$ получены из F' и F'' соответственно в результате подстановки.

Запись вида $F' = F''$, где F' и F'' — эквивалентные формулы, называется тождеством.

Последовательность однократных ЭП на основе некоторой системы тождеств τ — многократное ЭП на основе τ .

Система тождеств τ — полная $\Leftrightarrow$ для любых двух эквивалентных формул F_1 и F_2 из $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}^{\Phi}$ имеет место выводимость $F_1 \Rightarrow F_2$.

(72) Опр. Пусть ф-лы $\tilde{F}'$ и $\tilde{F}''$ получ. из F' и F'' сооб. заменами
 которого вхождение БП x_i на $\tilde{x}_i$. Тогда о $\tilde{F}'$ и $\tilde{F}''$ говорят,
 что они получ. из F' и F'' представительной порформы F вместо
 БП x_i при $i = 1 \dots n$ (при $X = (x_1, \dots, x_n)$, F' и F'' ф-лы
 от перем. $(x_1, \dots, x_n)$, $\tilde{F}_i$ -фор-ла над B , $i = 1 \dots n$)
 $t_{1,2}^D: y_1(y_2 \vee y_3) = y_1 y_2 \vee y_1 y_3$, тогда: $\exists x_1, x_2 = y_1, x_3 = y_2,$
 $\bar{x}_4 = y_3 \Rightarrow x_1 x_2 (x_3 \vee \bar{x}_4) \mapsto x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_4.$

Описать ЭП произвольной формулы стандартного базиса в формулу, которая представляет собой конъюнкцию букв или дизъюнкцию таких конъюнкций, указав, какие группы основных тождеств и каким образом при этом используются.

Обобщённая ЭК (ОЭК) - произвольная конъюнкция букв, содержащая, в общ. случ., повтор. или противополож. буквы.

ОДНД - дизъюнкция ОЭК, содержащая, в общем случ., повтор. атом.

Опишем ЭП произв. ф-ии F к ОДНД:

1) поднятие отрицаний
применим т-ва $t_{\neg}^M, t_{\&}^M, t_{\vee}^M$ к разрозн. лем вида $(\bar{F}_1), (F_1 \cdot F_2), (F_1 \vee F_2)$ соотв., пока все такие ф-ии не будут устранены.

2) раскрытие скобок
применим т-ва $\{t_{\& \vee}^D, t_{\&}^K\}$ к разрозненным видам $F_1 \cdot (F_2 \vee F_3)$ или $(F_1 \vee F_2) \cdot F_3$, пока они встрет. в преобразованной ф-ии.

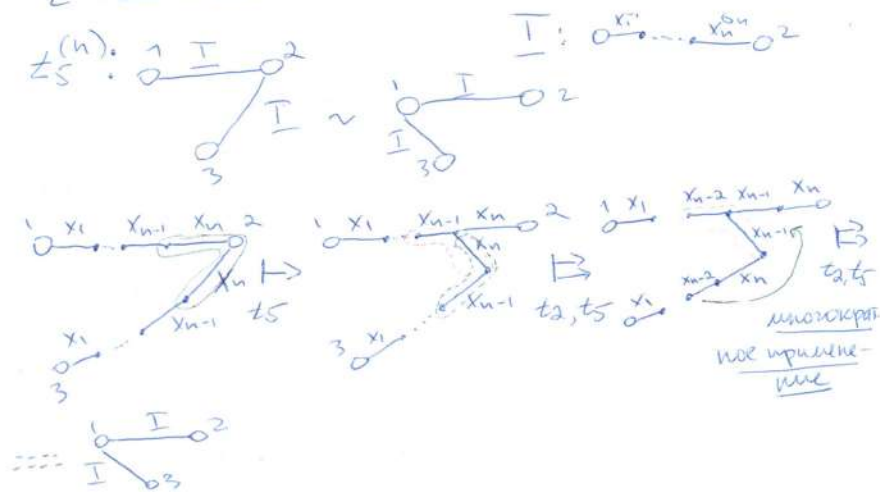
Определение тождества и подсхемы для КС из неориентированных контактов с неразделенными полюсами, принцип эквивалентной замены. Обобщенное тождество $t_5^{(n)}$ для ЭП КС, идея его вывода из основных или других обобщенных тождеств.

КС Σ' называется подсхемой схемы Σ ,
если $V(\Sigma') \subseteq V(\Sigma)$, $E(\Sigma') \subseteq E(\Sigma)$

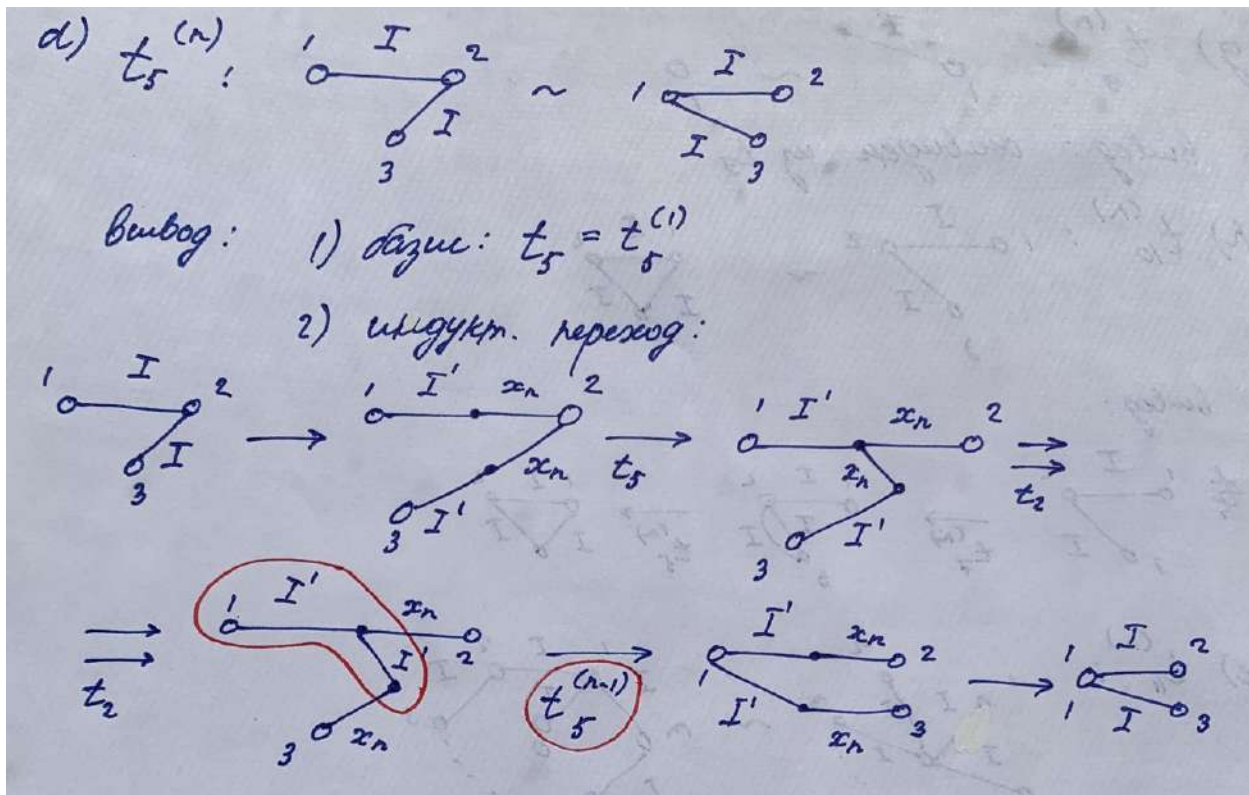
- v -полюс Σ , $v \in \Sigma' \Rightarrow v$ -полюс Σ'
- $v \in \Sigma'$, v -не полюс Σ , v инцидентна ребру из $E(\Sigma) \setminus E(\Sigma') \Rightarrow v$ -полюс Σ'
- $\forall v \in \Sigma'$ можно объявить полюсом.

пэ3: замечание подгруппы Σ^1 и Σ^2 ,
 ей схемой Σ^1 , мы получаем схему
 Σ^1 , которая эквив. схеме Σ .

Σ , которые реализуются в Σ' и Σ'' .
 Σ' эквив. Σ'' ($\sim$) $\Leftrightarrow \Sigma' \cup \Sigma''$ реализуют
 равные моменты ФАЛ. При этом
 предполагается, что соотв. групп
 групп помех в Σ' и Σ'' имеют
 одинаковые помехи, а эквив. $\Sigma' \cup \Sigma''$
 записывается в виде конъюнкции:
 $\vdash: \Sigma' \sim \Sigma''$.



Обобщенное тождество $t_5^{(n)}$ для ЭП КС, идея его вывода из основных или других обобщенных тождеств. Описать тот этап приведения КС от БП $x_1, \dots, x_n$ к каноническому виду, на котором используется данное тождество, и указать характер этого использования.



ДОБАВИТЬ ВТОРУЮ ЧАСТЬ ВОПРОСА ПРО ЭТАП ПРИВЕДЕНИЯ КС К КАНОН. ВИДУ (КТО РАЗОБРАЛСЯ - ДОБАВЬТЕ ИЛИ Я САМ ПОЗЖЕ ДОБАВЛЮ)
 ЕСЛИ ЧТО, ВСЕ ПО ЭТОМУ ВОПРОСУ СМОТРЕТЬ В КОНСПЕКТАХ АЛЕКСЕЯ (2020) на страницах 79-82.

Описание этапа приведения КС к каноническому виду, связанного с устранением ее внутренних вершин, не являющихся внутренними вершинами канонических цепей, с указанием свойств исходной схемы, тех шагов, которые позволяют устранить очередную вершину данного типа, и используемых при этом тождеств.

Σ_1 - КС, в кот. $\forall$ контакт принадлежит нек. канонической цепи порядка n , являющ. подсхемой схемы Σ_1 , примем радиусами этой подсхемы аргумент только концевые вершины данной цепи

опишем ЭП $\Sigma_1 \xrightarrow[t_n]{} \Sigma_2$.

где Σ_2 - КС, в кот. $\forall$ внутр. верш. явл. внутр. верш. некоторой канонической цепи из Σ_1 :

💡 индукция по числу вершин КС Σ_1 , кот. не явл. внутр. вершинами ее канон. цепей

1) базис: Σ_1 , кот. не имеет указ. вершин $\Rightarrow \Sigma_1 = \Sigma_2$

2) индуктивный переход:

$v \in \Sigma_1$ - одна из указ. вершин $\xrightarrow[t_6^{(n)}]{} \text{удалим все присоед. к } v \text{ "внешние циклы"}$

$\Delta C_1, \dots, C_q$ - все ост. цепи с концев. верш. v ;

не отр. общ. : $a_1 = 1 < a_2 < \dots < a_p < a_{p+1} = q+1$
 $j \in [1, p]$ } $\Rightarrow$

$\Rightarrow C_{a_j}, \dots, C_{a_{j+1}-1}$ - цепи типа $I_{i_j}^{(n)} - I_{j_j}^{(n)}$, $i_j, \dots, j_j \in [1, 2]^q$ - радиальные

применим $t_6^{(n)}$ к цепям одного типа (т.е. к каждой из этих p групп), получ. Σ_1' , в кот. из верш. v вых. по одной цепи каждого типа $\xrightarrow[t_9^{(n)}]{} \Sigma_1'', \Sigma_1''$ - присоединим к v цепи оставшихся типов $C_{p+1}, \dots, C_q \xrightarrow[t_2^{(n)}]{} \Sigma_1'''$

Σ_1''' - удалим v со всеми инцидентными $\xrightarrow[t_1^{(n)}]{} \text{удалим получившиеся изолированные вершины}$

по предположению индукции:

$\Sigma_1''' \xrightarrow[\{t_6^{(n)}, t_4^{(n)}, t_9^{(n)}, t_3^{(n)}, t_1^{(n)}\}]{} \Sigma_2$

Обобщенное тождество $t_4^{(n)}$ для ЭП КС, идея его вывода из основных или других обобщенных тождеств. Описать тот этап приведения КС от БП $x_1, \dots, x_n$ к каноническому виду, на котором используется данное тождество, и указать характер этого использования.

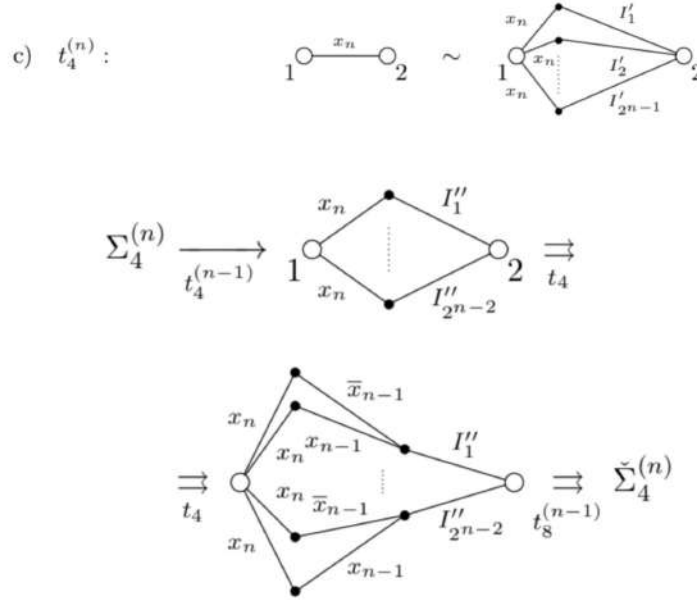


Рис. 7.11: вывод $t_4^{(n)}$

Лемма 8.1. Для любой КС Σ , где $\Sigma \in \mathcal{U}^K$ и $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$, и любой эквивалентной Σ КС $\hat{\Sigma}(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$ канонического вида существует ЭП $\Sigma \xRightarrow{\tau_n} \hat{\Sigma}$.

Доказательство. Построим ЭП вида

$$\Sigma \xRightarrow{\tau_n} \Sigma_1 \xRightarrow{\tau_n} \Sigma_2 \xRightarrow{\tau_n} \Sigma_3 \xRightarrow{\tau_n} \Sigma_4 = \hat{\Sigma},$$

где КС Σ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, обладает отмеченными выше свойствами $1, \dots, i$, отличающимися канонические КС. Первое из этих ЭП имеет вид

$$\Sigma \xRightarrow{t_4^{(n)}} \Sigma_1$$

Обобщенные тождества для КС (привести обобщенные варианты основных тождеств). Утверждение о выводе обобщенных тождеств из основных.

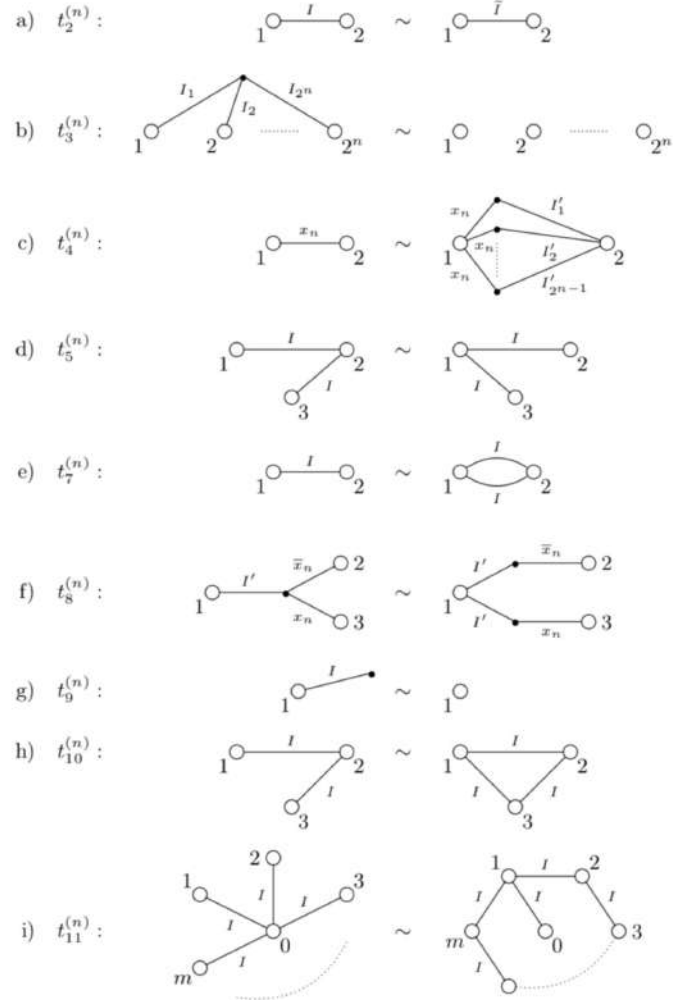


Рис. 7.8: обобщенные тождества порядка n для КС

Систему тождеств $\tau^{(n)} = \{t_1^{(n)}, \dots, t_{11}^{(n)}\}$, где $t_1^{(n)} = t_1, t_6^{(n)}$ — соответствующее основное тождество (см. рис. 7.1f), $t_2^{(n)}$ — система, состоящая из тождеств, показанных на рис. 7.8a, где $\tilde{I}$ — произвольная перестановка цепочки I , а остальные тождества приведены на рис. 7.8b—7.8i, будем называть системой *обобщенных тождеств порядка n* . При этом система $\tau_n = \{t_1, \dots, t_5, t_6^{(1)}, \dots, t_6^{(n)}\}$ считается системой основных тождеств порядка n , а система всех основных тождеств обозначается через τ_∞ .

Лемма 7.2. При $n \geq 2$ имеет место выводимость $\tau_n \Rightarrow \tau^{(n)}$.

Суммарное цикломатическое число КС и характер его изменения при ЭП КС на базе различных основных тождеств. Обоснование отсутствия конечной полной подсистемы в системе основных тождеств и отсутствия КПСТ в классе всех КС.

Суммар. цикломат. число КС
 $\Theta(\Sigma) = \sum \Theta(\Sigma_k)$
 $\Theta(G) = |E(G)| - |V(G)| + |C(G)|$
 $(x_1, \dots, x_n) \in B^n$
 $x_1^{n_1}, \dots, x_n^{n_n}$ и значения
остат. контактов
ребра. Σ
указание всех контактов
чрез, напр. из Σ
макс. число
ЛПЗ точек
цифров
число
связ.
коммент.
цифров

Лемма Если $\Sigma' \xrightarrow{t_1-t_5} \Sigma''$, то $\Theta(\Sigma') = \Theta(\Sigma'')$
а если $\Sigma' \xrightarrow{t_1-t_5} \Sigma''$, $k < n$, то $\Theta(\Sigma') - \Theta(\Sigma'') : 2^{n-k}$
 $\square$ $t_1-t_5 \rightarrow$ вначале проверим, и убеждаемся, что число
цифров не образуется.
 $t_6 \ x_{j_1}^{z_1} \dots x_{j_e}^{z_e}$ - разн. $B^n \Rightarrow$ цикл будет проходить
на 2^{n-e} наборах
 $e \leq m, \Theta(\hat{\Sigma}) - \Theta(\Sigma) = 2^{n-e} \Rightarrow$ разность: 2^{n-m} , ($e \leq m$)
н.м.г.

$\Sigma \xrightarrow{t_6} \hat{\Sigma}$

1) из Σ нельзя ввести КПСТ:
 $\exists \Sigma_N - \text{КПСТ} \Rightarrow \Sigma_N \xrightarrow{t_6} \Sigma''$
 $\Theta(\Sigma') = 1, \Theta(\Sigma'') = 0$, но тогда их разность г.д.: 2,
но это не так $\Rightarrow$ (?) $\Rightarrow$ нет конеч. полной подсистемы.

2) $\exists \Sigma - \text{КПСТ}$ где $\exists n \in \mathbb{N}$. $\exists N - \text{max}$ число B^n в $\Sigma, \Sigma_N - \text{КПСТ}$ где
 $\exists n \in \mathbb{N}$ от $N \in \mathbb{N} \Rightarrow \Sigma_N \xrightarrow{t_6} \Sigma \Rightarrow \Sigma_N - \text{КПСТ}$, то (?) н.п.
 $\Rightarrow$ ($\nexists$ КПСТ где $\exists n \in \mathbb{N}$)

Определение КС с неразделенными полюсами как помеченного графа, определение ФАЛ проводимости между ее вершинами и матрицы ФАЛ, реализуемой этой КС. Особенности матриц, реализуемых КС с неразделенными полюсами из неориентированных контактов, их обоснование.

Рассматриваем неориент. КС.

Опр. Если $p=q$, $a_1=b_1, \dots, a_p=b_p$ то $\Sigma(k_1, \dots, k_n; a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q)$ "заменимая" на $\Sigma(k_1, \dots, k_n; a_1, \dots, a_p)$ — КС с p неразделенными полюсами. (ясно, что это помеч. граф, где p пар — контакты с помечками)

Опр. $\forall v, u \in V(\Sigma)$ $g_{v,u}(k_1, \dots, k_n)$ — ФАЛ проводимости от v к u .
 $g_{v,u}(k_1, \dots, k_n) = 1 \iff \exists (v, u)$ — путь, состоящий из контактов $k_1^{a_1}, \dots, k_n^{a_n}$, проводящая на наборе $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$

Опр. Рассматривая ФАЛ проводимости для n пар a_i, a_j — можно составить матрицу проводимости КС $\Sigma(k_1, \dots, k_n; a_1, \dots, a_p)$
 $F = [f_{ij}]$ где f_{ij} — ФАЛ проводимости от a_i к a_j .

Особенности матриц:

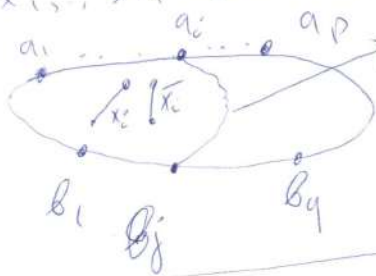
- 1) F — рефлексивная матрица, т.е. $f_{ii} = 1$ (ясно, так всегда есть путь от a_i к a_i из 0 конт.)
- 2) F — транзитивная матрица, т.е. $\forall i, j, l, f_{ij} \geq f_{il} \cdot f_{lj}$
 (т.к. $\begin{pmatrix} a_j \\ a_l \\ a_i \end{pmatrix}$ — всегда можно, поэтому так)
- 3) F — симметричная матрица, т.е. $f_{ij} = f_{ji}$ — очев., т.к. путь от a_i к a_j так же и от a_j к a_i .

Определение КС с разделенными полюсами как помеченного графа, определение ФАЛ проводимости между ее вершинами и матрицы ФАЛ, реализуемой этой КС. Представление ФАЛ, реализуемой (1, 1)-КС, в виде ДНФ, связанной с системой цепей, соединяющих полюса КС.

(p, q) -КС $\Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q)$

- (p, q) сеть из коммактов (граф с p входами и q выходами) $\rightarrow$ ребра помечены БИ

$x_1, \dots, x_n$ или $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$



КС реализует матрицу проводимости из $q \times p$ -элементов проводимости:

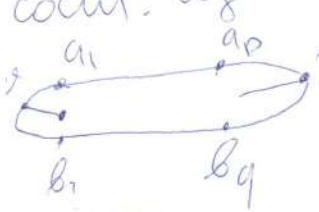
$$F = \|f_{ij}\|, 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q$$

$\rightarrow$ от a_i к b_j

Апр. $\forall u, v \in V(\Sigma)$:

ФАЛ провод. от v к u : $g_{v,u}(x_1, \dots, x_n)$:

$g_{v,u}(x_1, \dots, x_n) = 1 \Leftrightarrow \exists \sigma \in \Sigma(v, u)$ - цепь, сост. из коммактов $x_1^{\sigma_1}, \dots, x_n^{\sigma_n}$ - коммат провод.



$\sigma = (u, v)$ - цепь в Σ сост. из коммактов $x_{i_1}^{\sigma_{i_1}}, \dots, x_{i_r}^{\sigma_{i_r}}$
 $K = x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} \cdot \dots \cdot x_{i_r}^{\sigma_{i_r}}$

$\Rightarrow C_1, \dots, C_t$ - все провод. цепи, соед. v с u . Тогда

$$g_{v,u} = K(C_1) \vee \dots \vee K(C_t)$$

(1, 1) КС, которая реализует ФАЛ: 2 операции над коммат провод.

1) $\xrightarrow{a} b$, реал. x_i^{σ} 2) Σ_1 реал. f_1 Σ_2 реал. f_2 $\Sigma = \Sigma_1 \vee \Sigma_2$ $\Rightarrow f_1 \vee f_2$

Тождества перехода от формул в одном базисе к формулам в другом базисе. Утверждение о моделировании ЭП формул в различных базисах (теорема перехода) и схема его доказательства.

$\exists B = \{\psi_1, \dots, \psi_b\}$ - базис и $B' = \{\psi'_1, \dots, \psi'_b\}$ - базис

$$\psi_i = \psi_i(k_{k_1}, \dots, k_{k_i})$$

Пусть $i=1, \dots, b$ $\Phi'_i(k_{k_1}, \dots, k_{k_i}, \underbrace{k_{k_{i+1}}, \dots, k_{k_b}}_{\text{фиктивные}})$ реализует ψ_i , $\Phi'_i \in U_{B'}^{\Phi}$.

$$\exists \Phi' = \begin{cases} \Phi'_1 \\ \dots \\ \Phi'_b \end{cases} \text{ - формулы перехода от } B \text{ к } B'$$

$$\Pi' = \begin{cases} \Pi'_1 \rightarrow \psi_1 = \Phi'_1 \\ \dots \\ \Pi'_b \rightarrow \psi_b = \Phi'_b \end{cases} \text{ - тождества перехода от } B \text{ к } B'$$

Утв 12.2 (Теорема перехода)

Пусть τ - конечная полная система тождеств (КРСТ) для ЭП формул из U_B^{Φ} , а Π' и Π - системы тождеств для перехода от базиса B к B' и от B' к B соответственно. Тогда система тождеств $\{\Pi'(\tau), \Pi'(\Pi)\}$ является КРСТ для ЭП формул из $U_{B'}^{\Phi}$.

Рек-во

$\forall$ эп из $U_B^{\Phi} : F_1 \xrightarrow[\tau]{\approx} F_2$ можно структурно моделировать в $U_{B'}^{\Phi}$.

$$F'_1 = \Pi'(F_1), \tau = \Pi'(\tau) \Rightarrow F'_1 \xrightarrow[\tau]{\approx} F'_2$$

$$F'_2 = \Pi'(F_2), \tau = \Pi'(\tau) \Rightarrow F'_1 \xrightarrow[\tau]{\approx} F'_2$$

(но это моделирует только для формул из $\Pi'(U_B^{\Phi})$)

Чтобы сделать для произв формул из $U_{B'}^{\Phi}$:

$$\Pi'(\Pi(F)) \text{ где } F \in U_{B'}^{\Phi}$$

$\Pi'(\Pi)$ - система тожд. получ. из тожд. из Π у которых правая часть заменена на основе Π'

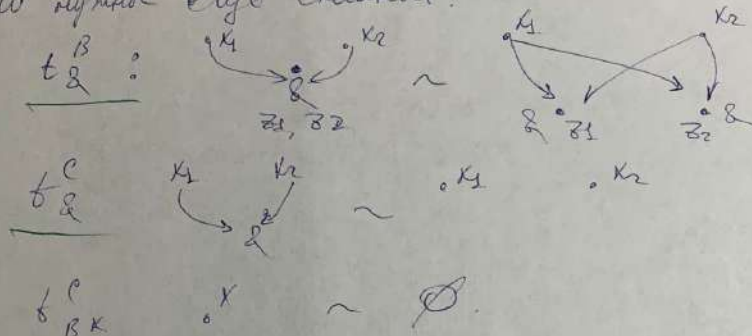
Приведение СФЭ над B к системам формул и обратно. Формулировка утверждения о построении КПСТ для ЭП СФЭ в базисе B на основе КПСТ для ЭП формул базиса B , его доказательство на основе моделирования однократных ЭП формул в классе СФЭ.

• Для каждой ф-лы $F \in U_B^{\Phi}$ сопоставим $\leftrightarrow F = D_F$ - квазидерево, т.е. дерево D_F , в котором все листья одинаковы, тогда $F \in U_B^C$. (очев., можно и обратно переходить "расплевая")

• Если $t: F' = F'' \leftrightarrow t: F' \sim F''$

• Σ -система тогда $U_B^{\Phi} \leftrightarrow \Sigma$ -система тогда U_B^C .

Но тут еще схемное!



Аналогично для V и V ф-цион. элементов U_B^{Φ} .

$$\Sigma^C = \{t_{v_1}^C, t_{v_2}^C, \dots, t_{v_b}^C\}, \Sigma^B = \{t_{v_1}^B, \dots, t_{v_b}^B\}$$

Лемма 12.1 Если Σ - КПСТ для ЭП формул из U_B^{Φ} , то $\{\Sigma, \Sigma^C, \Sigma^B\}$ - КПСТ для ЭП СФЭ из U_B^C .

Рассужд.

$\Sigma \Sigma_1, \Sigma_2$ две эквив. СФЭ над B . Покажем что

$$\Sigma_1 \xrightarrow[\Sigma, \Sigma^C, \Sigma^B]{\Sigma_2} \Sigma_2$$

1) Если $\Sigma \xrightarrow{\Sigma_1} \Sigma_2$ то $\exists$ эп $\Sigma \xrightarrow[\Sigma, \Sigma^C, \Sigma^B]{\Sigma_1} \Sigma_2$ где $\Sigma = (A_1, \dots, A_m)$ - канон. базис Σ , A_i - ф-лы разн. z_i ; Σ_1 - объедин. квазидеревьев y которых общие только базисные вершины.

2) Однократ. ЭП $F \rightarrow \hat{F}$ можно преобразовать $F \xrightarrow[\Sigma, \Sigma^C, \Sigma^B]{\hat{F}} \hat{F}$ так с каждой Σ .

3) В итоге $\Sigma_1 \xrightarrow[\Sigma, \Sigma^C, \Sigma^B]{\hat{\Sigma}_1} \hat{\Sigma}_1 \xrightarrow[\Sigma, \Sigma^C, \Sigma^B]{\Sigma_2} \Sigma_2$

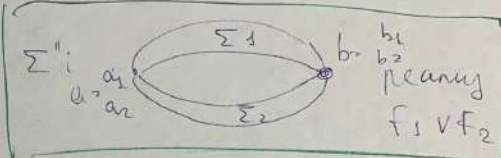
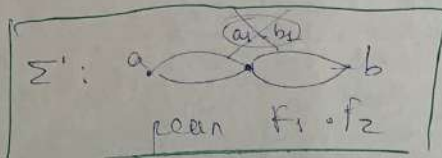
Индуктивное определение π -схемы и реализуемой ею ФАЛ. Утверждение о моделировании формул и π -схем, идея его доказательства.

Опр π -схема $-(1,1)$ КС, определяется индуктивно:

1) $(1,1)$ -КС из 1 контакта $a \xrightarrow{x_i^1} b$ — реализует x_i^1 .

2) $\exists \Sigma_1, \Sigma_2$ — π -схемы реализ ФАЛ f_1, f_2

$\Rightarrow \Sigma' = \Sigma_1 \cdot \Sigma_2$ и $\Sigma'' = \Sigma_1 \parallel \Sigma_2$ — π -схемы, полученные послед. и паралл. соединением Σ_1, Σ_2 .



$L(\Sigma)$ — число контактов — сложность КС Σ

Лемма 11.1 $\forall \pi$ -схемы Σ можно сопоставить ей формулу F и Π с поднятой отриц.

$R(F) = L(\Sigma)$ и обратно

Доказательство Индукция по строению π -схем Σ .

1) $(1,1)$ КС из 1 контакта $a \xrightarrow{x_i^1} b$ $F = x_i^1$
 $R(F) = L(\Sigma) = 1$

2) $\exists \Sigma_1 \leftrightarrow F_1$ и либо $\Sigma' = \Sigma_1 \cdot \Sigma_2$
 $\Sigma_2 \leftrightarrow F_2$ $\Sigma'' = \Sigma_1 \parallel \Sigma_2$

$\Rightarrow \Sigma' \leftrightarrow F_1 \cdot F_2$ $\Sigma'' \leftrightarrow F_1 \vee F_2$

По инд. предпос. $R(F_1) = L(\Sigma_1)$ $R(F_2) = L(\Sigma_2)$ $\Rightarrow R(F_1 \cdot F_2) = L(\Sigma')$
 $R(F_1 \vee F_2) = L(\Sigma'')$

так процесс идет суммирован. контактов и сложностей.

(на каждом шаге Ф-ла с поднятой отриц.)

Индуктивное определение π -схемы и реализуемой ею ФАЛ. Утверждение о моделировании формул и π -схем, идея его доказательства. Изоморфизм и эквивалентность π -схем, утверждение о верхней оценке числа попарно не эквивалентных π -схем от БП $x_1, \dots, x_n$ сложности не более, чем L , ее обоснование.

Опр. π -схема $-(l, 1)$ КС, описан индуктивно:

1) $(1, 1)$ -КС из 1 контакта $a \xrightarrow{x_i^1} b$ — реализует x_i^1

2) $\exists \Sigma_1, \Sigma_2$ — π -схемы реализ ФАЛ f_1, f_2
 $\Rightarrow \Sigma' = \Sigma_1 \cdot \Sigma_2$ и $\Sigma'' = \Sigma_1 \parallel \Sigma_2$ — π -схемы, реализующие по след. и паралл. соед. Σ_1, Σ_2 .

Σ' : $a \xrightarrow{f_1 \cdot f_2} b$
реал. $f_1 \cdot f_2$

Σ'' : $a \xrightarrow{f_1 \vee f_2} b$
реал. $f_1 \vee f_2$

$L(\Sigma)$ — число контактов — сложность КС Σ

Лемма 11.1 $\forall \pi$ -схемы Σ можно составить эквив. ей формулу F_Σ и $\forall \Sigma$ с логич. структурой:
 $R(F) = L(\Sigma)$ и обратно

Доказ. Индукция по структуре π -схем Σ .

1) $(1, 1)$ КС из 1 контакта $a \xrightarrow{x_i^1} b$ $F = x_i^1$
 $R(F) = L(\Sigma) = 1$

2) $\exists \Sigma_1 \hookrightarrow F_1$ и $\Sigma_2 \hookrightarrow F_2$ и тогда $\Sigma' = \Sigma_1 \cdot \Sigma_2$
 $\Sigma'' = \Sigma_1 \parallel \Sigma_2$
 $\Rightarrow \Sigma' \hookrightarrow F_1 \cdot F_2$ $\Sigma'' \hookrightarrow F_1 \vee F_2$

По инд. предп. $R(F_1) = L(\Sigma_1)$ $R(F_2) = L(\Sigma_2)$ $\Rightarrow R(F_1 \cdot F_2) = L(\Sigma')$
 $R(F_1 \vee F_2) = L(\Sigma'')$

т.к. можно считать суммированием, разбором и помножением.
 (на каждом шаге Ф-ла с логич. структурой)

Опр. π -схемы Σ' и Σ'' изоморфны $\Leftrightarrow$ изоморфны соответств. им графы
эквивалентны $\Leftrightarrow$ реализуют равные ФАЛ

Лемма $\forall L, n \in \mathbb{N}$ выполняется $\|\mathcal{U}^n(L, n)\| \leq (2n)^L$
 число попарно неэквив. π -схем

Доказ.
 $\Sigma \in \mathcal{U}^n(L, n) \Rightarrow$ можно составить Ф-лу $F \in \mathcal{U}^n$ с логич. структурой (по лемме 11.1)

По следствию из леммы 10.2 получ. предполож., учитывая, что $R(F) \leq L(F)$ для формул с логич. структурой.

Определение эквивалентных формул и определение эквивалентных СФЭ, утверждение о верхней оценке числа попарно неэквивалентных одновыходных СФЭ от входных БП $x_1, \dots, x_n$ имеющих сложность не больше, чем L .

результ. 1
 №3.
 Форм-лы F' и F'' реализ. равн. f' и f'' наз. равн. или экв.
 СФЭ K' и K'' наз. экв., если они реализ. равные системы ФАР.
 Длн $\forall n, L \in \mathbb{N} \Rightarrow \|U^F(L, n)\| \leq (8n)^{L+1}$
 Длн $\forall n, L \in \mathbb{N} \Rightarrow \|U^c(L, n)\| \leq (8(L+n))^{L+1}$

Определение эквивалентных СФЭ, утверждение о верхней оценке числа попарно неэквивалентных одновыходных СФЭ от входных БП $x_1, \dots, x_n$ имеющих сложность не больше, чем L , в стандартном базисе, идея его доказательства.

Две СФЭ назыв. эквивал., если они реализ. рав. системы ФАЛ.

Лемма

$\forall n \text{ и } L \in \mathbb{N}$ выполн: $\|U^c(L, n)\| \leq (\varrho(L+n))^{L+1}$

идея док-ва:

Чтобы задать СФЭ $\Sigma \in U^c$ с точностью до квазиизоморф. дан:

- 1) выбрать глав. рекур. поддерево D' с $q \leq L$ верш. верш. пом. ФС базиса
- 2) присоед. каждой верш. D' либо к одному из n входов Σ , либо к одной из q верш. D' , или. от корня.

Тогда пред. оценка получ. из оценки числа D' (не более ϱ^L) и оценки числа способов присоединения ($\leq (L+n)^{L+1}$ способов, т.к. $R(\Sigma) \leq L(\Sigma)+1$), перемножая имеем требуем.

Определение изоморфных и эквивалентных СФЭ, утверждение о верхней оценке числа попарно неэквивалентных одновыходных СФЭ от входных БП $x_1, \dots, x_n$ имеющих сложность не больше, чем L , в стандартном базисе, а также в базисе $\{x_1 \rightarrow x_2, \bar{x}_1\}$. Идеи получения указанных оценок.

Две СФЭ являются изоморфными, если они изоморфны как помеченные графы, и эквивалентными, если они реализуют равные системы ФАЛ.

Лемма 4.3. *Для любых натуральных n и L выполняется неравенство*

$$\|\mathcal{U}^C(L, n)\| \leq (8(L + n))^{L+1}. \quad (4.6)$$

Доказательство. Заметим, что для того, чтобы задать СФЭ Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}^C(L, n)$, с точностью до квазиизоморфизма достаточно:

1. выбрать её остовное неупорядоченное наддерево $\mathcal{D}'$ с q , $q \leq L$, нелистовыми вершинами, которые помечены ФС базиса B_0 ;
2. присоединить каждый лист $\mathcal{D}'$ либо к одному из n входов Σ , либо к одной из нелистовых вершин $\mathcal{D}'$, отличной от корня.

Оценка (4.6) получается из приведенной в лемме 4.2 оценки числа деревьев $\mathcal{D}'$ и оценки числа способов присоединения каждого листа $\mathcal{D}'$ путем их перемножения.

Лемма доказана. □

Для базиса $\{x_1 \rightarrow x_2, \bar{x}_1\}$ оценка: $\|\mathcal{U}^C(L, n)\| \leq (6(L + n))^{L+1}$

Определение эквивалентных и изоморфных КС. Утверждение о верхней оценке числа попарно неэквивалентных π -схем и $(1, 1)$ -КС от БП $x_1, \dots, x_n$ имеющих сложность не больше, чем L , и аналогичная оценка для π -схем и КС, состоящих из замыкающих контактов. Обоснование указанных оценок.

Схемы Σ' и Σ'' считаются изоморфными, если изоморфны соответствующие им графы, и эквивалентными, если они реализуют равные системы ФАЛ.

Лемма 6.2. *При любых натуральных L и n выполняется неравенство*

$$\|\mathcal{U}^\pi(L, n)\| \leq (12n)^L. \quad (6.2)$$

Доказательство. В силу леммы 6.1, достаточно доказать, что число попарно не эквивалентных формул $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ с поднятыми отрицаниями над базисом B_0 , для которых $R(\mathcal{F}) \leq L$, не превосходит $(12n)^L$. Требуемая оценка вытекает из следствия к лемме 4.2.

Лемма доказана. □

Лемма 6.3. *При любых натуральных L и n выполняется неравенство*

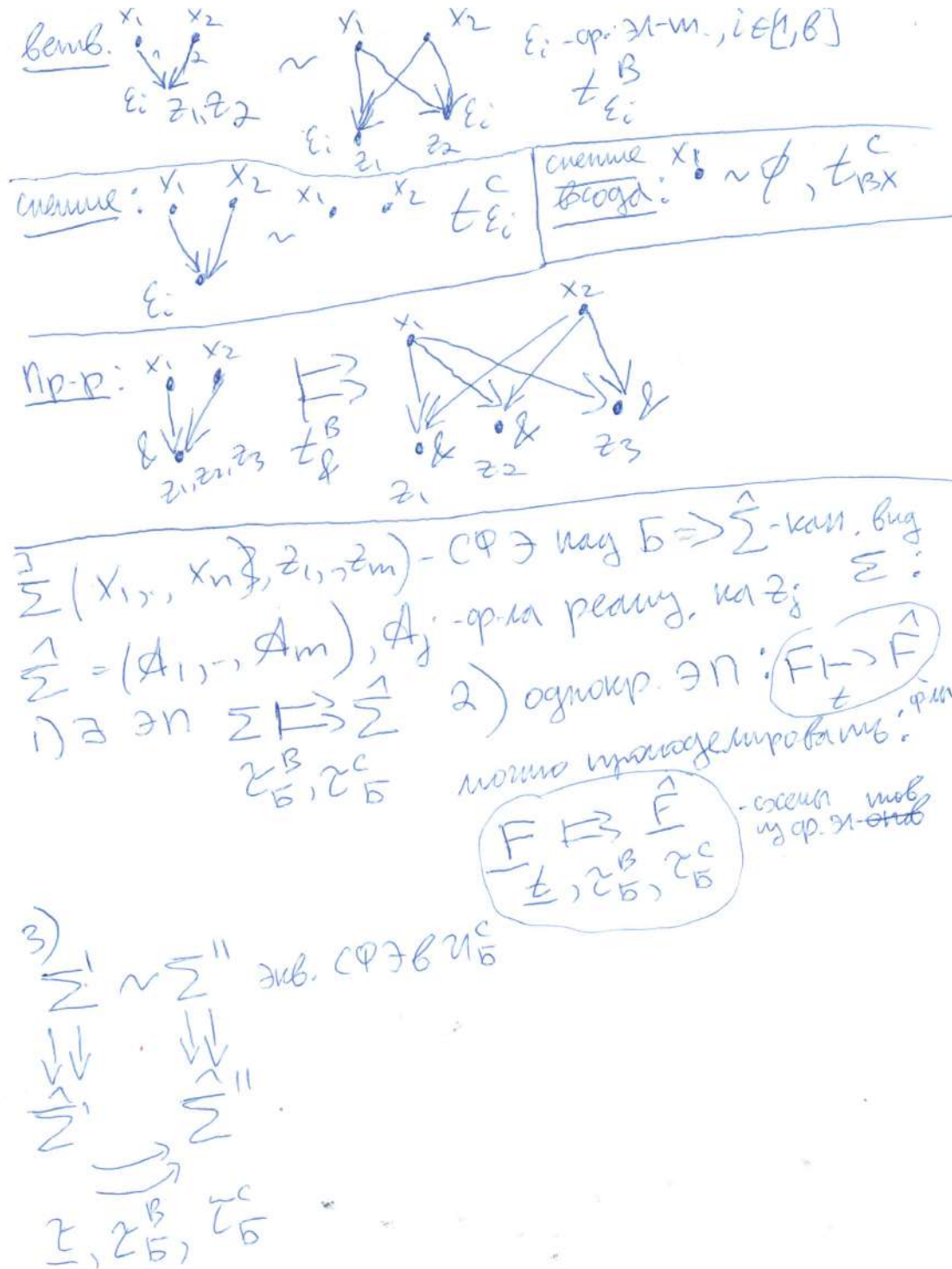
$$\|\mathcal{U}^K(L, n)\| \leq (8nL)^L.$$

Доказательство. Возьмем произвольную КС $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1; a_2)$, $\Sigma \in \mathcal{U}^K(L, n)$, и выделим в ней остовное дерево $\mathcal{D}$ с корнем a_2 так, чтобы в $\mathcal{D}$ вошли все инцидентные a_2 контакты Σ , а вершина a_1 была листом $\mathcal{D}$. Пусть, далее, $\mathcal{D}'$ — связанное с $\mathcal{D}$ остовное наддерево КС Σ , которое получается путем присоединения каждого из не вошедших в $\mathcal{D}$ ребер Σ к одной из своих концевых вершин, отличной от a_1 (см. §1). Рассмотрим ориентированное упорядоченное дерево $\mathcal{D}''$, получающееся из $\mathcal{D}'$ введением (условной) ориентации всех его ребер по направлению к корню и таким их упорядочением, при котором вершина a_1 становится первым листом $\mathcal{D}''$ (см. §1).

Заметим, что число ребер (вершин, листьев) дерева $\mathcal{D}''$ не больше, чем L (соответственно $L + 1$, L), и поэтому, в силу (1.4), число таких деревьев с учетом пометок их ребер символами $x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ не больше, чем $(8n)^L$. Заметим также, что КС Σ может быть получена в результате присоединения каждого листа дерева $\mathcal{D}''$ к одной из его вершин, отличной от a_2 . Следовательно,

$$\|\mathcal{U}^K(L, n)\| \leq |\mathcal{U}^K(L, n)| \leq (8nL)^L.$$

Тождества ветвления и снятия, приведение с их помощью СФЭ к системе формул. Привести с помощью указанных тождеств к системе СФЭ из одного ФЭ &, выход которого имеет пометки z_1, z_2, z_3 .



Тожества ветвления и снятия, приведение с их помощью СФЭ к системе формул. Утверждение о моделировании ЭП формул в классе СФЭ, идея его доказательства.

На рис. 5.2а и 5.2б показаны тождество ветвления $t_{\varepsilon_i}^B$ и тождество снятия $t_{\varepsilon_i}^C$ для функционального элемента ε_i , $i \in [1, b]$, соответственно, а на рис. 5.2с — тождество снятия входа $t_{\text{вх}}^C$. Заметим, что применение тождества снятия равносильно выполнению операции удаления висячей вершины соответствующего типа (см. §7). Заметим также, что тождества $t_{\varepsilon_i}^B$, $t_{\varepsilon_i}^C$, $t_{\text{вх}}^C$ не являются аналогами формульных тождеств и положим

$$\tau_B^B = \{t_{\varepsilon_i}^B\}_{i=1}^b, \quad \tau_B^C = \{t_{\varepsilon_i}^C\}_{i=1}^b \cup \{t_{\text{вх}}^C\}.$$

Очевидно, что с помощью этих тождеств можно избавиться от всех висячих вершин и всех внутренних ветвлений, имеющих в СФЭ. Следовательно, для любой СФЭ Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}_B^C$, существует ЭП вида $\Sigma \models \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ — формула (система формул) из $\mathcal{U}_B^C$.

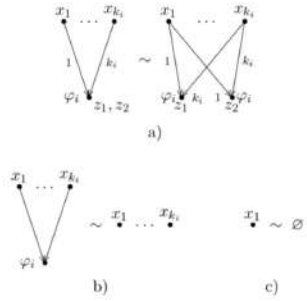


Рис. 5.2: тождества ветвления, снятия ФЭ и снятия входа

Пусть, далее, $\mathcal{F} \mapsto \hat{\mathcal{F}}$ — однократное ЭП для формул из $\mathcal{U}_B^C$, где тождество t имеет вид

$$t: \mathcal{F}'(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{F}''(x_1, \dots, x_n),$$

а формула $\hat{\mathcal{F}}$ получается из формулы $\mathcal{F}$ заменой подформулы $\mathcal{F}'(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ формулой $\mathcal{F}''(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$. Сопоставим этому ЭП «моделирующее» его однократное ЭП СФЭ вида $\mathcal{F} \mapsto \hat{\Sigma}$ (см. рис. 5.3). Заметим, что в том случае, когда формулы $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ являются бесповторными формулами, а БП $x_1, \dots, x_n$ — их существенными БП, СФЭ $\hat{\Sigma}$ совпадает с СФЭ $\mathcal{F}''$. В остальных случаях из подформулы вида $\mathcal{F}'(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ формулы $\mathcal{F}$ необходимо с помощью тождеств τ_B^B сформировать сначала подсхему $\mathcal{F}'(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$, а затем применять тождество t . При этом в СФЭ $\hat{\Sigma}$ могут появиться

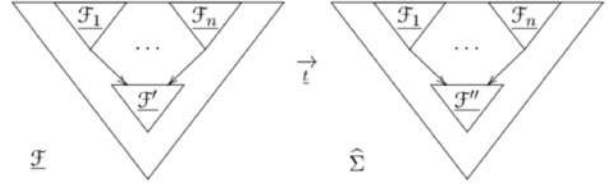


Рис. 5.3: моделирование ЭП формул с помощью ЭП СФЭ

висячие вершины или внутренние «ветвления», и тогда для перехода от $\hat{\Sigma}$ к $\hat{\mathcal{F}}$ необходимо провести ЭП вида $\hat{\Sigma} \models \hat{\mathcal{F}}$, где $\hat{\mathcal{F}} \in \mathcal{U}_B^C$.

Следовательно, для любого ЭП вида $\mathcal{F} \mapsto \hat{\mathcal{F}}$, где $\mathcal{F}, \hat{\mathcal{F}} \in \mathcal{U}_B^C$, существует моделирующее его ЭП вида τ

$$\mathcal{F} \models \hat{\mathcal{F}}, \quad \{\tau, \tau_B^B, \tau_B^C\}$$

На рис. 5.4 показано ЭП СФЭ из $\mathcal{U}^C$, которое моделирует ЭП (3.1) для формул из $\mathcal{U}^C$:

$$x_1(x_2x_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \xrightarrow{t_{1,k}^M} x_1(x_2x_3 \vee \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3) \xrightarrow{t_{1,k}^{PK}} x_1.$$

Из описанного выше способа «моделирования» ЭП формул с помощью ЭП СФЭ, а также способа перехода от формул к СФЭ и обратно на основе ЭП с помощью тождеств τ_B^B , τ_B^C вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 5.1. Если τ — конечная полная система тождеств для ЭП формул из $\mathcal{U}_B^C$, то $\{\tau, \tau^C, \tau^B\}$ — конечная полная система тождеств для ЭП СФЭ из $\mathcal{U}_B^C$.

Следствие. Система тождеств $\{\tau^{\text{осн}}, \tau^B, \tau^C\}$ — КПСТ для ЭП СФЭ из $\mathcal{U}^C$.

Тождества ветвления и снятия, приведение с их помощью СФЭ над B к системе формул. Привести с помощью указанных тождеств в базисе $B_0 = \{x_1, x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$ квазидерево формулы $((x_1 \vee x_2) \vee x_3) \vee (x_1 \vee x_2)$ к СФЭ сложности 4.

Тождество ветвления $t_{E_i}^B$ для ФЭ E_i : B - базис $i \in [1, b]$

Тождество снятия $t_{E_i}^C$ для ФЭ E_i :

Положим: $\tau_B^B = \{t_{E_i}^B\}_{i=1}^b$, $\tau_B^C = \{t_{E_i}^C\}_{i=1}^b \cup \{t_{\text{вх}}^C\}$,
 где $t_{\text{вх}}^C$ - т-во снятия входа

Очев., что с пом. этих формул можно избавиться от всех висящих вершин и внутр. ветвлений, имеющихся в СФЭ $\Rightarrow \forall \Sigma$ -СФЭ, $\Sigma \in \mathcal{U}_B^C$, $\exists$ ЭП вида:
 $\Sigma \xrightarrow[\{\tau_B^C, \tau_B^B\}]{\mathcal{F}}$, где $\mathcal{F}$ - ф-ла (система формул) из $\mathcal{U}_B^P$.

Пример: $((x_1 \vee x_2) \vee x_3) \vee (x_1 \vee x_2)$

КВАЗИДЕРЕВО

СФЭ сложности 4

ВВ: будьте внимательны при переписывании деревьев и схем, проверь наличие нумерации всех дуг, а также наличие пометок у всех вершин.

Канонический вид КС из неориентированных контактов с неразделенными полюсами. Утверждение о приведении КС к каноническому виду с помощью основных (обобщенных) тождеств и его основные этапы; идея устранения тех внутренних вершин КС, которые не являются внутренними вершинами канонических цепочек. Вывод из данного утверждения утверждения о полноте системы основных тождеств для класса всех КС и о существовании КПСТ для некоторых его подклассов.

КС $\hat{\Sigma} = (x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$ явл. канонической КС, если:

1. $\forall$ контакт принадлежит некоторой канонической цепи порядка n , являющаяся подцепью схемы $\hat{\Sigma}$, причем разности этой подцепи имеют только концевые вершины данной цепи;
2. $\forall$ внутр. вершина $\hat{\Sigma}$ явл. внутр. вершиной нек. цепи из $n-1$;
3. в КС $\hat{\Sigma}$ отсутствуют "висящие цепочки" и "параллельные" цепи, т.е. КЦ порядка n из $n-1$, кот. соедин. одни и те же полюсы и реализуют равные экв.
4. в КС $\hat{\Sigma}$ нет существующих транзитивных проводимостей, т.е. наличие цепи вида $I_i^{(n)}$, соединяющих полюс a_j с полюсом a_k и полюс a_k с полюсом a_l , влечет наличие цепи такого же вида, соединяющей a_j с полюсом a_l .

Тв. Для $\forall \Sigma \in \mathcal{U}^k$, $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$, и $\forall \hat{\Sigma}(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$, $\Sigma \sim \hat{\Sigma}$, $\hat{\Sigma}$ -канон., $\exists$ $\exists \Pi \Sigma \xrightarrow{\tau_n} \hat{\Sigma}$.

Этапы док-ва:

$$\Sigma \xrightarrow{\tau_n} \Sigma_1 \xrightarrow{\tau_n} \Sigma_2 \xrightarrow{\tau_n} \Sigma_3 \xrightarrow{\tau_n} \Sigma_4 = \hat{\Sigma}, \quad \Sigma_i \text{ явл. св-вом } i \text{ из определения выше, } i=1,4$$

Идея $\Sigma_1 \xrightarrow{\tau_n} \Sigma_2$: индукция по числу вершин КС Σ_1 , кот. не явл. внутр. верши. её КЦ

- 1) базис: Σ_1 , кот. не содержит указ. вершин $\Rightarrow \Sigma_1 = \Sigma_2$;
- 2) индукт. переход: Σ_1 содержит указ. вершин, и одна из таких

$$\Sigma_1 \xrightarrow{\tau_n^{(n)}} \Sigma_1^* \xrightarrow{\tau_n^{(n)}} \Sigma_1' \xrightarrow{\tau_n^{(n)}} \Sigma'' \xrightarrow{\tau_n^{(n)}} \Sigma_1'' \xrightarrow{\tau_n^{(n)}} \Sigma_1''' \xrightarrow{\tau_n^{(n)}} \Sigma_2$$

удаление висящих цепочек, выведение по $I_i^{(n)}$ из типов $i_1, \dots, i_r \in [1, 2^n]$, добавление $\{t_1, t_2, t_3\}$ и $t_1^{(n)}$ цепи остав. типов, удаление и удаление из внутр. вершин

индуктивное предположение

Т. Для $\forall$ КС Σ', Σ'' от БП $X(n)$, $\Sigma' \sim \Sigma''$, $\exists$ $\exists \Pi$ вида $\Sigma' \xrightarrow{\tau_n} \Sigma''$

сл.1. Система τ_n - КПСТ для $\exists \Pi$ КС из $\mathcal{U}^k$ от БП $x_1, \dots, x_n$

сл.2. Система τ_{∞} - ПСТ для $\exists \Pi$ КС из $\mathcal{U}^k$.

NB: вопрос – гроб, предпринята попытка максимально сократить его, однако при переписывании необходимо ужимать еще.

Определение сложности $L_{\&, \vee}^C(f)$ ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ в классе СФЭ. Формулировка утверждения о нижней оценке данной сложности, получаемой с помощью забивания константами одной из ее БП, идея его доказательства. Мультиплексорная ФАЛ μ_n порядка n и получение с помощью данного утверждения нижней оценки для ее сложности $L^C(\mu_n)$, а также глубины $D(\mu_n)$.

1 $L_{\&, \vee}^C(f)$ - число ФЭ $\& \vee$ в СФЭ, реализ. f .

Лемма: Если для ФАЛ $f, f \in P_2(n)$, и для любого $\sigma, \sigma \in B$, ФАЛ $f_\sigma(x_1, \dots, x_{n-1}, \sigma) \neq 0, 1$, то

$$L_{\&, \vee}^C(f) \geq \min \{L_{\&, \vee}^C(f_0), L_{\&, \vee}^C(f_1)\} + 1$$

Доказ. $\exists$ Σ -миним. по числу ФЭ $\&$ и $\vee$ СФЭ Σ , реализ. ФАЛ f и не содержащая цепочек из друг. поминдов. соединенных ФЭ $\neg$. Из условия леммы следует, что вход ФЭ $\neg$, присоед. к входу x_n СФЭ Σ не может быть ее выходом.

$\exists$ цепь C соединяет вход x_n СФЭ Σ с ее выходом z , и $\exists \sigma \in B$ равна $0 \Leftrightarrow$ БП x_n подается в C либо на вход ФЭ $\&$, либо на вход ФЭ $\neg$, к выходу которого в C присоединен ФЭ $\vee$.

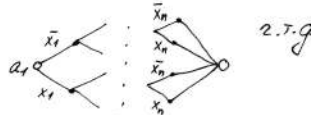
$\Leftarrow$ СФЭ $\hat{\Sigma}$, реализ. ФАЛ $f_\sigma \neq 0, 1$ и получ. из СФЭ Σ в результате подстановки $x_n = \sigma$, а также последующего ЭП на основе тождеств $z^{\neg k}$ вплоть до устранения всех входов констант. Убедимся, что будут удалены хотя бы 2 ФЭ типа $\&$ или $\vee$.

В случае $\sigma = 0$ из Σ будет удален ФЭ E' , явл. первым ФЭ типа $\&$ или $\vee$ цепи C .

$\Rightarrow$ на цепи C СФЭ Σ имеются ФЭ E'' типа $\&$ или $\vee$, на вход которого поступает либо выход E' , либо выход ФЭ $\neg$, присоед. к E' $\Rightarrow$ ФЭ E'' также будет удален при переходе от Σ к $\hat{\Sigma}$ и $\Rightarrow L_{\&, \vee}^C(f) = L_{\&, \vee}^C(\Sigma) \geq L_{\&, \vee}^C(\hat{\Sigma}) + 2 \geq L_{\&, \vee}^C(f_\sigma) + 2$

При $\sigma = 1$ аналогично.

Мультиплексор пор-ка n - $\mathcal{H}$ -схема:



$$L^C(\mu_n) \geq 2^{n+1} + n - 1$$

Применим утверждение к $y_{2^{n-1}-1}$: $L_{\&, \vee}^C(f) \geq \frac{2^{n+1}-2}{2} + 2^{n-1} + 2 = 2^{n+1}$

к $y_{2^{n-2}-1}$: $L_{\&, \vee}^C(f) \geq 2^{n+1} - 1 + 2 = 2^{n+1} - 1$

и т.д. до $y_0 \Rightarrow + (n-2)$: $L^C(\mu_n) \geq 2^{n+1} - 1 + (n-2) + 2 = 2^{n+1} + n - 1$

$$D(\mu_n) \geq n + 1$$

Определение сложности $L^K(F)$ системы ФАЛ $F = (f_1, \dots, f_m)$ от БП $x_1, \dots, x_n$ в классе КС. Формулировка утверждения о (нетривиальной) нижней оценке этой сложности и идея его доказательства. Дизъюнктивный дешифратор $\vec{J}_n$ порядка n и нижняя оценка указанного вида для его сложности.

Определим сложность $\Psi(F)$ сист. ФАЛ относ. функционала Ψ , обладающего свойством монотонности, в классе $\mathcal{U}$ как мин. значение $\Psi(\Sigma)$ на м-ве тех схем Σ из $\mathcal{U}$, кот. реализуют F .
Число канитов КС назыв. сложностью КС Σ ($L(\Sigma)$)

Величину $\Psi(F)$, в том случае когда Ψ совпадает с введенным функционалом L , назыв. сложностью системы ФАЛ F ($L^K(F)$).

Лемма

Если сист. ФАЛ $F = (f_1, \dots, f_m)$ состоит из функций ФАЛ от БП $X(n)$, отличных от 0 и 1, то $L^K(F) \geq 2^{n-1} \sum_{j=1}^m |N_{f_j}|$.
Док-во:

Рассм. произв. $(1, m)$ -КС Σ , реализующую сист. F . $\forall \alpha \in B^n$ в Σ имеется свой конт., соотв. вход Σ и не выход q_i , где ФАЛ = 1 на α . Из $|E(G)| - |V(G)| + |K(G)| \geq 0$ имеем: $|E(\Sigma(\alpha))| \geq f_1(\alpha) + \dots + f_m(\alpha)$. Присл. по всем α :
 $2^{n-1} L(\Sigma) \geq \sum_{j=1}^m |N_{f_j}| \Rightarrow$ треб. оценка.

Система из всех ФАЛ вида $\bar{x}_1 \vee \dots \vee \bar{x}_n$, упор. по их номерам, назыв. дизъюнктивным дешифратором порядка n от БП $x_1, \dots, x_n$ ($\vec{J}_n$)
 $L^K(\vec{J}_n) \geq 2^{n+1} - 2$.

НЕ ОЧЕНЬ ПОНЯТНО КАКУЮ ТЕОРЕМУ ОН ХОЧЕТ (ИХ ДВЕ), НО СУДЯ ПО СЛЕДУЮЩЕМУ ВОПРОСУ, НУЖНА ЭТА.

Определение сложности $L_B^C(F)$ системы ФАЛ $F = (f_1, \dots, f_m)$ в классе СФЭ над базисом B и формулировка утверждения о простейшей нижней оценке этой сложности. Универсальная система ФАЛ $\vec{P}_2(n)$ порядка n и нижняя оценка указанного вида для ее сложности. Верхняя оценка этой сложности и ее обоснование.

Определим сложность $\Psi(F)$ сист. ФАЛ относ. функционала Ψ , благ. св-вом монотон, в классе $\mathcal{U}$ ком. значение $\Psi(\Sigma)$ на мн-ве тех схем Σ из $\mathcal{U}$, ком. реализ. F .

$L(\Sigma)$ — сложность СФЭ Σ , т.е. число всех вх. ФЭ из B .

Величину $\Psi(F)$, в том случае когда Ψ совпадает с введ. выше функц. L , назыв. сложн. сист. ФАЛ F ($L_B^C(F)$).

Лемма.

Для сист. $F = (f_1, \dots, f_m)$, сост. из попарно разн. ФАЛ отн. к переменным, справедливо $L_B^C(F) \geq m$.

Для мн-ва ФАЛ $G \subseteq P_2(n)$ через $\vec{G}$ обозн. сист., сост. из всех разн. ФАЛ мн-ва G , упр. в соотв. с порядком их станд. значений. Сист. ФАЛ $P_2(n)$ — универс. сист. порядка n .

$$L_B^C(\vec{P}_2(n)) \geq 2^n - n$$

Лемма

$\forall n \in \mathbb{N}$ в $\mathcal{U}_B^C \exists$ СФЭ U_n , реализ. систему ФАЛ $\vec{P}_2(n)$ и сложность которой равна $2^n - n$.

Док-во.

В силу полноты B , в $\mathcal{U}_B^C \exists$ сист. ФЭ Σ от $B \cap X_1, \dots, X_n$, реализ. сист. $\vec{P}_2(n)$. Искомая СФЭ U_n — строго приведен. СФЭ, эквивалентная Σ и получ. из неё в рез-те применения операций присоединения эквивалент. вершин и операций удаления вис. вершин. $\Rightarrow$ число всех вершин СФЭ U_n , вис. и висодов $\geq 2^n \Rightarrow L(U_n) = 2^n - n \Rightarrow$ следствие $L_B^C(\vec{P}_2(n)) \leq 2^n - n$.

Определение функции Шеннона $L^\Phi(n)$ и $D(n)$ со всеми необходимыми «промежуточными» понятиями. Формулировка утверждения о нижней мощности оценки сложности $L^\Phi(f)$ и глубины $D(f)$ для почти всех ФАЛ $f, f \in P_2(n)$, и вытекающие из него нижние асимптотические оценки функций Шеннона $L^\Phi(n)$ и $D(n)$. Идея и основные этапы доказательства этого утверждения.

$$\begin{aligned} L^\Phi(n) &= \max_{f \in P_2(n)} L^\Psi(f), \text{ где } L^\Psi(f) = \min_{F \text{ реал. } f} L^\Psi(F) \\ \uparrow \\ \text{ф-ция Шеннона} \\ D(n) &= \max_{f \in P_2(n)} D(f) \leftarrow \text{ф-ция Шеннона для } f \\ D(f) &= \min_{F \text{ реал. } f} D(F) \end{aligned}$$

Умб. Две нек. посл-вост $\varepsilon_i = \varepsilon_i(n)$, где $i = 1, 2$ и $n = 1, 2, \dots$: $\varepsilon_i(n) \geq 0$ при $n \geq n_0$ и $\varepsilon_i(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ где $\forall$ почти все ФАЛ $f, f \in P_2(n)$
 Всп-мо: $L^\Phi(f) \geq (1 - \varepsilon_1(n)) \frac{2^n}{\log n}, D(f) \geq n - \log \log n - \varepsilon_2(n)$

$$\begin{aligned} \square) n = 2^\Phi, \Psi = L \\ \tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}(n) &= (1 - \varepsilon_1(n)) \frac{2^n}{\log n} - 1 \Rightarrow (\text{умб. 9.2}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \|u^\Phi(\tilde{\varepsilon}, n)\| &\leq (8n)^{\tilde{\varepsilon}} \Rightarrow \varepsilon_1(n) = \frac{n}{\log n} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{\|u^\Phi(\tilde{\varepsilon}, n)\|}{2^{2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$2) n = 2^\Psi, \Psi = D \Rightarrow \tilde{D}(n) = \frac{n - \log(\log n + n)}{1/2^{\tilde{D}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\text{умб. 9.2}) \Rightarrow \|u^\Psi[\tilde{D}, n]\| \leq (8n)^{1/2^{\tilde{D}}} \Rightarrow$$

$$\delta = \frac{\|u^\Psi[\tilde{D}, n]\|}{2^{2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{н. м. 9.})$$

а-вие: $L^\Phi(n) \gtrsim 2^n / \log n$; $D(n) \gtrsim n - \log \log n - o(1)$

Определение функции Шеннона $L^\Phi(n)$ (со всеми необходимыми «промежуточными» понятиями). Нижняя мощностная оценка этой функции и ее обоснование. Верхняя оценка данной функции Шеннона, получаемая с помощью моделирования совершенной ДНФ с использованием контактного дерева. Построить с помощью моделирования совершенной ДНФ на основе контактного дерева формулу (π -схему), реализующую ФАЛ $f(x_1, x_2, x_3)$, где $\tilde{\alpha} = (0111\ 0110)$.

$$L^\Phi(n) = \max_{f \in P_2(n)} L^\Phi(f), \text{ где } L^\Phi(f) = \min_{F \text{ - реал. } f} L^\Phi(F)$$

пр-ые
Шеннона

члв. где нек. $\varepsilon_1(n): \varepsilon_1(n) \geq 0$ при $n \geq n_0$,
 $\varepsilon_1(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ где почти все ФАЛ $f, f \in P_2(n)$ верны

$$L^\Phi(f) \geq (1 - \varepsilon_1(n)) \cdot 2^n / \log_2 n$$

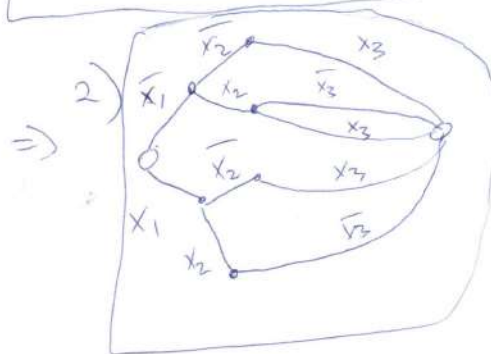
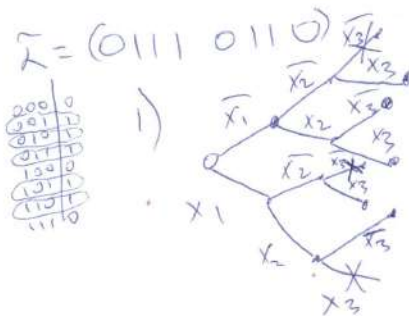
$$\square \quad n = 2^n, \psi = n, \tilde{L}(n) = (1 - \varepsilon_1(n)) \cdot \frac{2^n}{\log n} - 1 \Rightarrow$$

$$= (\text{члв. 9.2}) \Rightarrow \|U^\Phi(\tilde{L}, n)\| \leq (8n)^{\tilde{L}} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_1 = \frac{4}{\log n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{\|U^\Phi(\tilde{L}, n)\|}{2^{2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} O_{n.m.g.}$$

а-вч: $\boxed{L^\Phi(n) \geq \frac{2^n}{\log n}}$

версия оценки, найт. с пом. мод-ние сов. ДНФ
на основе КД $\boxed{L^\pi(n) \leq 2^{n+1} - 2}$



Определение функции Шеннона $L^C(n)$ (со всеми необходимыми «промежуточными» понятиями). Нижняя мощностная оценка этой функции и ее обоснование. Верхняя оценка данной функции Шеннона, получаемая методом Шеннона. Построить с помощью метода Шеннона, разлагая ФАЛ $f(x_1, x_2, x_3)$ где $\tilde{a} = (0001\ 0111)$, по БП x_1, x_2 , реализующую ее СФЭ.

$$L^C(n) = \max_{f \in P_2(n)} L^C(f), \text{ где } L^C(f) = \min_{\Sigma, \text{real. } f} L^C(\Sigma)$$

$\uparrow$
 ф-ция Шеннона

Числ. где нек. $\varepsilon_1(n)$, $\varepsilon_1(n) \geq 0$ при $n \geq n_0$ и $\varepsilon_1(n) \rightarrow 0$ где почти всех ФАЛ $f, f \in P_2(n)$ верно:

$$L^C(f) \geq (1 + \varepsilon_1(n)) \cdot 2^n / n$$

$\square \mathcal{U} = \mathcal{U}^C, \Psi = L$ (числ. функц. х-ов)

$$\tilde{L}(n) = (1 + \varepsilon_1(n)) \cdot \frac{2^n}{n} - n \Rightarrow (\text{гипот. 9.3}) \Rightarrow$$

$$\|\mathcal{U}^C(\tilde{L}, n)\| \leq (8(\tilde{L} + n))^{\tilde{L}+1} \leq (8 \cdot \tilde{L})^{\tilde{L}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{\|\mathcal{U}^C(\tilde{L}, n)\|}{2^{2^n}} \Rightarrow \log \delta \leq \tilde{L}(3 + \log \tilde{L}) - 2^n$$

$$\Leftrightarrow 2^n(1 + \varepsilon_1) \geq \frac{2^{2^n}}{\delta} - \frac{\log 2^n - 4}{n}, \text{ полож. } \varepsilon_1 = \frac{\log n - 5}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta \rightarrow 0 \text{ т.ч.г. следовательно: } L^C(n) \geq 2^n/n$$

$\tilde{a} = (0001\ 0111)$

$$\begin{aligned} f(00x_3) &= 0 \\ f(01x_3) &= x_3 \\ f(10x_3) &= x_3 \\ f(11x_3) &= 1 \end{aligned}$$

Определение функции Шеннона $L^K(n)$ (со всеми необходимыми «промежуточными» понятиями). Нижняя мощностная оценка этой функции и ее обоснование. Верхняя оценка данной функции Шеннона, получаемая методом Шеннона. Построить с помощью метода Шеннона, разлагая ФАЛ $f(x_1, x_2, x_3)$, где $\tilde{\alpha} = (1000\ 1110)$, по БП x_1, x_2 , реализующую ее (1, 1)-КС.

$$L^K(n) = \max_{f \in P_2(n)} L^K(f) \quad \text{— оп-ция Шеннона в классе комбинат. схем}$$

$$\text{т.е. } L^K(f) = \min_{\Sigma} L(\Sigma)$$

$$\left(L^K(n) \geq \frac{2^n}{n} \right) \leftarrow \begin{array}{l} \Sigma \text{ (КС) реал. } f \\ \text{нижняя оценка} \end{array} \quad \text{19.1}$$

$$L^K(f) \geq (1 - \varepsilon_1(n)) \cdot \frac{2^n}{n}, \quad \varepsilon_1(n) \text{ — погр.}$$

$$\varepsilon_1(n) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ для любых ФАЛ } f. \quad (\varepsilon_1(n) \geq 0 \text{ при } n \geq n_0)$$

Доказ-во: $\|u(\tilde{\Psi}, n)\| \leq \delta \cdot 2^{2^n}, \quad 0 \leq \delta \leq 1$
 возьмем $\delta = 0$: $\|u^K(\tilde{\Sigma}, n)\| \leq (8n\tilde{L})^{\tilde{L}/n}$

$$\frac{\|u^K(\tilde{\Sigma}, n)\|}{2^{2^n}} = \delta, \quad \log \delta \leq \tilde{L}(3 + \log n + n \cdot \log n - 2^n)$$
 покажем, что $\log \delta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$, это так, н.к.:

$$\log \delta \leq \tilde{L}(3+n) - 2^n \leq 2^n \left((1-\varepsilon) \left(1 + \frac{3}{n}\right) - 1 \right) = 2^n \left(\frac{3}{n} - \varepsilon \right)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{4}{n} \Rightarrow \log \delta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty, \quad \delta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{ч.и.г.})$$

$$\boxed{L^K(n) \leq 4 \cdot \frac{2^n}{n}} \quad \text{верхняя оценка}$$

Пр.р $\tilde{\alpha} = (1000\ 1110)$
 $f(00x_3) = (10) = \bar{x}_3$
 $f(01x_3) = (00) = 0$
 $f(10x_3) = (11) = 1$
 $f(11x_3) = (10) = \bar{x}_3$

Операция суперпозиции КС, ее правильность и корректность. Разделительные КС, формулировка леммы Шеннона и следствия из нее. Определение каскадных контактных схем (ККС), понятие инверсной ККС и формулировка утверждения о ее сложности.

схема Σ имеет вид $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, т.е. явл. суперпоз Σ'' и Σ' без общ. вершин и вход-выходных полюсов, если она получ. в рез-те объедин. этих схем и присоед. (части) входов схемы Σ'' к (некоторым) выходам схемы Σ' .
 Пусть $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$; F, F', F'' - сист. фун-ий реализ. $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$ - такая суперпозиция:

1) Правильность $\Leftrightarrow F = F''(F')$

2) Корректность $\Leftrightarrow$ 1 вып. и на вых. порезании Σ' в схеме Σ реализ. F' .

Схема наз. разделительной по входу (выходу), если ФАП проверяемости между V ее разл. входами (выходами) равна 0.

КС Σ от БП $x_1, \dots, x_n$ разл. на наборе $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ знат. этих БП, если соотв. разделительностью явл. сеть $\Sigma|_\alpha$.

Пусть КС Σ явл. рез-ом стыковки $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, а F, F', F'' - матр. реализ. КС $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$ соотв. Тогда $F \approx F' \cdot F''$ и $F = F' \cdot F''$, если КС Σ'' разделит. по входу или КС Σ' разделит. по выходу.

Из сле. разделимости КС Σ'' по входу в которой верш. КС $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, кот. соотв. входу КС Σ' , реализ. тот же самый столбец ФАП, что и в КС Σ' , т.е. рассматр. суперпоз. явл. коррект.

Рав-во $F = F' \cdot F''$ вып. на V наборе знат. БП, на кот. КС Σ'' разделит. по входу или КС Σ' разд. по выходу.

ККС - приведенные КС без изолир. полюсов, кот. может быть получ. из сист. тех же вершин в рез-те ряда операций присоед. одного или двух противополож. и опер. переименов. выходов.

Дополнение Σ'' к полной ККС Σ' с 1 входом или инверсной к Σ' ККС.

Если $(1, m)$ -ККС Σ' реализ. сист. ФАП $F' = (f'_1, \dots, f'_m)$ то $\exists$ $(1, m)$ -ККС Σ'' , кот. реализ. сист. ФАП $F'' = (f''_1, \dots, f''_m)$ и где кот. $L(\Sigma'') \leq 2L(\Sigma')$.

Операция присоединения одного или двух противоположных контактов к выходам КС и ее свойства, определение каскадной КС. Формулировка утверждения о переходе от заданной каскадной КС к инверсной каскадной КС и идея его доказательства.

а) Добавить $(1, m)$ -КС Σ к вых. из $(1, \bar{m})$ -КС $\bar{\Sigma}$ в рез. добав. новой вых. вершины v , ком. с $\bar{\Sigma}$ с вых. вершинами v_0 и v_1 КС Σ канонич. $\bar{x}_i$ и $x_i \Rightarrow$ в v_0 и v_1 КС Σ реализ. те же самые ФАЛ g_0 и g_1 , что и в КС Σ , а в v ФАЛ $g: g = M(x_i, g_0, g_1) = \bar{x}_i g_0 \vee x_i g_1$.

б) Аналог. верно, когда v КС Σ связ. с v_0 только одним канонич. вх. $x_i, i \in \{0, 1\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в v реализ. ФАЛ $g = x_i g_0$



Эти опер. распр. на случай КС с неск. входами и выхода. моделир. в классе $CS \rightarrow$ в базисе CS каскад. КС Σ — приведенная КС без указ. помех, ком. может быть получена из сист. помех. вершин в рез. ряда операций присоед. одного или двух противополож. канонич. а опер. переимен. входов.

Лемма.

Если $(1, m)$ -ККС Σ' реализ. сист. ФАЛ $F' = (f'_1, \dots, f'_m)$, то $\exists (1, m)$ -ККС Σ'' , ком. реализ. сист. ФАЛ $\bar{F}' = (\bar{f}'_1, \dots, \bar{f}'_m)$ и для ком. $L(\Sigma'') \leq 2L(\Sigma')$

Идея док-ва:

Известно, что $L(\Sigma'') \leq 2L(\Sigma')$, где Σ'' — доп. к Σ' инверсная экв. доп. в каждой вх. канонич. ККС реализ. тем же ФАЛ $\Rightarrow$ из базиса CS имеем экв.

Определение m -регулярного множества наборов куба $B^q, q > m$ от БП $x_1, \dots, x_q$ и описание связанного с ним разбиения куба B^q . Формулировка утверждения о моделировании ФАЛ с помощью БП или их отрицаний на компонентах m -регулярного разбиения куба B^q , пример такого разбиения для $m = 2$ и ФАЛ $x_1 \rightarrow x_2, x_1 \oplus x_2$

Мн-во $S, S \subseteq B^q$, наз. m -регул.
 мин-вом наборов куба B^q , если $m < q$,
 $|S| = 2^m$ и все префиксы длины m
 наборов из S различны. Заметим, что
 m -регул. мин-во $S, S \subseteq B^q$, можно
 взаимнооднозн. сопост. сист. ФАЛ $\psi =$
 $= (\psi_1, \dots, \psi_{q-m})$ из $P_2^{q-m}(m)$ так, что набор

$\alpha = (B, \gamma)$, где $B \in B^m, \gamma \in B^{q-m}$, принадл.
 S тогда и только тогда, когда $\psi(B) = \gamma$.

Для $\forall m, l, q \in \mathbb{N}, q = m + l$ и для
 $\forall$ сист. ФАЛ $g = (g_1, \dots, g_l)$ из $P_2^l(m)$ $\exists$
 m -регул. разд. $\Delta = (S_1, \dots, S_{2^l})$ куба B^q
 такое, что $\forall$ ФАЛ g_i на любой компоненте
 S_i совпадает либо с одной из БП $x_{m+1}, \dots,$
 x_q , либо ее отр.

Пример где $m = 2$ и ФАЛ $x_1 \rightarrow x_2,$
 $x_1 \oplus x_2$

Построим S_i - m -регул. мин-во, соотв.
 заданной системе ФАЛ. Это мин-во сост.
 из наборов вида $(x_1, x_2, x_1 \rightarrow x_2, x_1 \oplus x_2)$,
 тогда $\Delta = \{S_i \oplus \alpha \mid \alpha \in B^4, 0 \leq \nu(\alpha) \leq 3\} =$
 $\Delta = \{ \{ (0010), (0111), (1001), (1110) \},$
 $\{ (0011), (0110), (1000), (1111) \},$
 $\{ (0000), (0101), (1011), (1100) \},$
 $\{ (0001), (0100), (1010), (1101) \} \}$.

Определение m -регулярного множества наборов куба $B^q, q > m$ от БП $x_1, \dots, x_q$ и его свойства. Формулировка утверждения о моделировании ФАЛ с помощью БП или их отрицаний на компонентах m -регулярного разбиения куба B^q . Построить 2-регулярное разбиение куба B^4 от БП x_1, x_2, x_3, x_4 на каждой компоненте которого ФАЛ $\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$ и $x_2 \rightarrow x_1$ совпадают с одной из ФАЛ $x_3, \bar{x}_3, x_4, \bar{x}_4$.

Мн-во $S, S \subseteq B^q$, наз. m -регул.
 мн-вом наборов куба B^q , если $m < q$,
 $|S| = 2^m$ и все префиксы длины m
 наборов из S различны. Заметим, что
 m -регул. мн-во $S, S \subseteq B^q$, можно
 взаимнооднозн. сопост. сист. ФАЛ $\psi =$
 $=(\psi_1, \dots, \psi_{q-m})$ из $P_2^{q-m}(m)$ так, что набор

$\alpha = (B, \gamma)$, где $B \in B^m, \gamma \in B^{q-m}$, принадл.
 S тогда и только тогда, когда $\psi(B) = \gamma$.

Для $\forall m, l, q \in \mathbb{N}, q = m + l$ и для
 $\forall$ сист. ФАЛ $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_l)$ из $P_2^l(m)$ $\exists$
 m -регул. разд. $\Delta = (S_1, \dots, S_{2^l})$ куба B^q
 такое, что $\forall$ ФАЛ φ_i на любой компонен-
 те S_i совпадает либо с одной из БП $x_{m+1}, \dots,$
 x_q , либо ее отр.

$B_4 \quad \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2, x_2 \rightarrow x_1$

x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

$\oplus (0, 0, 0, 1)$

$\oplus (0, 0, 1, 0)$

$\oplus (0, 0, 1, 1)$

Спасибо

Утверждения о сложности СФЭ, получаемых асимптотически наилучшим методом синтеза, и вытекающая из него верхняя оценка, соответствующей функции Шеннона. Описание разложения (представления) ФАЛ на котором основано доказательство этого утверждения, и структуры получаемой схемы с указанием основного по сложности блока.

(13) Для $\forall$ ФАЛ $f \in P_2(n)$ $\exists$ реализ. ее СФЭ $\Sigma_f \in \mathcal{U}^c$:

$$L(\Sigma_f) \leq \frac{2^n}{n} (1 + \frac{5 \log n + O(1)}{n}) \leftarrow$$

$$\Rightarrow L^c(n) \leq \frac{2^n}{n} \Rightarrow L^c(n) \sim \frac{2^n}{n}$$

(очев. можно просто писать.)

$$f(x_1, \dots, x_q, x_{q+1}, \dots, x_n) = \bigvee_{G'' \in B^{n-q}} K_{G''}(x'') \cdot f_{G''}(x')$$

$$= \bigvee_{\substack{G'' \in B^{n-q} \\ |G| = \lambda}} K_{G''}(x') \cdot \left(\bigvee_{\substack{1 \leq p \leq p \\ G'' \in G}} g_{G''}^{(p)}(x') \right) \leftarrow \begin{matrix} = 1 \text{ если} \\ x'' = G'' \end{matrix}$$

для кор. q и ранга p

$\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$

Σ' (схема)

Σ'' (схема)

$L(\Sigma_f) \leq \frac{2^n}{n}$

$L(\Sigma'') \leq 4 \cdot 2^{n-q}$

$L(\Sigma') \leq 3p \cdot 2^{s+q}$

Утверждение о сложности КС, получаемых асимптотически наилучшим методом синтеза, и вытекающая из него верхняя оценка соответствующей функции Шеннона. Описание разложения (представления) ФАЛ, на котором основано доказательство этого утверждения, и структуры соответствующей схемы с указанием основной по сложности подсхемы.

(12)

Donc $\forall \varphi \in \mathcal{P}_2(n) \exists$ partition en $1 \leq \ell \leq \ell(\varphi)$:

$$L(\varphi) \leq 2^{n/n} \cdot (1 + O(1/\sqrt{n}))$$

$$\Rightarrow \text{T.E. } L^k(n) \leq \frac{2^n}{n} \Rightarrow L^k(n) \sim \frac{2^n}{n}$$

$$f(x_1, \dots, x_q, x_{q+1}, \dots, x_n) \equiv$$

$$\underbrace{\quad}_{x'} \quad \underbrace{\quad}_{x''}$$

$$\equiv \bigvee_{i \in I} \chi_{\sigma_i}(x') \cdot \bigvee_{\sigma'' \in B^{n-q}} K_{\sigma''}(x'') \bigwedge_{i \in I'} \chi_{\sigma''}(x') =$$

ТРЕТЬЯ СТРОКА, ПОСЛЕ « $\Rightarrow$ т.к. » ОПИСКА: ЗНАК ПЕРВОГО НЕРАВЕНСТВА, РАЗУМЕЕТСЯ, В ДРУГУЮ СТОРОНУ

$\dagger \quad \textcircled{=}$

$$\prod_{l=1}^{z^0} \chi_{S_l}(x') \cdot V_{G'' \in B^{n-g}} K_{G''}(x'') \hat{L}_{i,G''}^{(P)}(x') =$$
$$= \prod_{l=1}^{z^0} \chi_{S_l}(x') V_{G'' \in B^{n-g}} K_{G''}(x'') \left(x_{m''}^{(P)}, g_{i,G''}^{(P)} v \dots v x_q^{(P)}, g_{i,G''}^{(P)} \right)$$

разные sp
 $x_m^{(P)}$
 $\bar{x}_m^{(P)}$
ортогональные
корректно на S_i
тут осн. состоятельность (2^n комп.)
 2^p

так как ортогональность зависит от корректности

Σ'_i

Утверждение о сложности формул, получаемых асимптотически наилучшим методом синтеза, и вытекающая из него верхняя оценка соответствующей функции Шеннона; поведение функции Шеннона для глубины ФАЛ. Описание разложения (представления) ФАЛ, на котором основано доказательство этого утверждения, и структуры соответствующей формулы.

(14) Для $\forall$ ФАЛ $f \in P_2(n)$ в $\mathbb{N}^P$ реализуется ее ф-на F_f , где кот: $L(F_f) \leq \frac{2^n}{\log n} (1 + \frac{2 \log \log n + O(1)}{\log n})$
 $D(F_f) \leq n \cdot \log \log n + O(1)$
 $\Rightarrow L^+(n) \sim \frac{2^n}{\log n} \Rightarrow L^+(n) \leq \frac{2^n}{\log n} (или \leq ?)$
 $D(n) \leq n \cdot \log \log n + O(1)$

$\forall h(x') \quad \forall i \in [1, 2^q], h(x') \equiv \hat{h}_{\delta_i}(x_1, \dots, x_m) =$
 $\underbrace{g^{(1)} \vee \dots \vee g^{(p)}}_{\in \mathcal{G}} \underbrace{x_{j_1}^{T_1} \vee \dots \vee x_{j_p}^{T_p}}_{\in \mathcal{D}} = J(x')$
 $\forall f(x_1, \dots, x_q, x_{q+1}, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma \in B^{n-q}} K_{\sigma^n}(x'') \cdot f_{\sigma^n}(x') =$
 $= \bigvee_{i=1}^{2^q} \underbrace{x_{\delta_i}^{X'}}_{\in \mathcal{G}} \bigvee_{\sigma'' \in B^{n-q}} K_{\sigma''}(x'') \cdot J_{\sigma''}(x')$
 $\tilde{F}_f = \bigvee_{i=1}^{2^q} \underbrace{O_{\delta_i}(x')}_{\in \mathcal{G}} \underbrace{J_{n-q}(x''), J_{\sigma_{j_1}}(x'), \dots, J_{\sigma_{j_p}}(x'))}_{\in \mathcal{D}} \quad \rightarrow \text{ф-ры по из гл. 16.5 без ф-ры}$

$J(x') = x_{j_1} \vee \dots \vee x_{j_p} \vee \overline{x_{j_1}} \vee \dots \vee \overline{x_{j_p}} = \bigoplus$
 $\bigoplus x_{j_1} \vee \dots \vee x_{j_p} \vee \overline{x_{j_1}} \vee \dots \vee \overline{x_{j_p}} = J(x')$
 F_f получ из $\tilde{F}_f$ отбросив $\bigoplus J_{\sigma''}$ по числу отриц.
 $\rightarrow \tilde{F}_f = \bigvee_{i=1}^{2^q} O_{\delta_i}(x) \cdot J_{n-q}(x''), \underbrace{J_{\sigma_{j_1}}(x') \vee \dots \vee J_{\sigma_{j_p}}(x')}_{\in \mathcal{D}} \quad \rightarrow$
Считаем сложность и выстроим парамитры.
 $L_{\text{ЛН}}(F) \leq R(\tilde{F}_f) \leq 2^q (2^{n-q} + 2^{n-q+1} + p \cdot 2^{n-q})$
 $\rightarrow \text{реш по 57 } x' \leq 2^{n-q+1}$

Задача синтеза схем для ФАЛ из специального класса Q , $Q \subseteq P_2$, определение функции Шеннона $L^C(Q(n))$, $L^K(Q(n))$. Формулировка утверждения о нижних мощностных оценках этих функций, идея его доказательства.

Задача синтеза схем для ФАЛ
 у Q , $Q \subseteq P_2$: ψ -ф-л сложности в Q
 $\forall F = (f_1, \dots, f_m)$ построить ψ -оптимальную схему $\hat{\Sigma}$, real. F , т. е. такую, что $\psi(\hat{\Sigma}) = \min_{\substack{\Sigma \in Q, \\ \Sigma, \text{ real. } F}} \psi(\Sigma)$ - ψ -сложность в Q .

$L^C(Q(n)) = \max_{f \in Q(n)} L^C(f)$ ← sup-име ф-ция
 $L^K(Q(n)) = \max_{f \in Q(n)} L^K(f)$ ← минимал

2. $\psi(Q(n)) = \max_{f \in Q(n)} \psi(f)$ - ф-я Шеннона

Зам. Для класса ФАЛ Q такое, что $n = \bar{o}\left(\frac{\log |Q(n)|}{\log \log |Q(n)|}\right)$ ($\log n = \bar{o}(\log \log |Q(n)|)$), выполняются следующие асимптотические неравенства: $L^C(Q(n)) \geq \frac{\log |Q(n)|}{\log \log |Q(n)|}$ / $L^K(Q(n)) \geq \frac{\log |Q(n)|}{\log \log |Q(n)|}$

Д-во: $\|(\psi(Q(n)), n)\| \geq |Q(n)|$

Поготов. в $y \geq \frac{\log q}{\log(a \log q)} \left(1 + \frac{\log \log(a \log q)}{\log(a \log a)}\right)$ н/м $a=1$

Определение дизъюнктивно-универсального множества (ДУМ) ФАЛ. Построение ДУМ, связанного с разбиением единичного куба и стандартного ДУМ; пример стандартного ДУМ порядка 3 и высоты 3.

№5.

Мн-во ФАЛ $\mathcal{G}, \mathcal{G} \subseteq P_2(m)$, наз.
дизъюнктивно-универсальным мн-
вом (ДУМ) порядка m и ранга r ,
если $\forall$ ФАЛ $g, g \in P_2(m)$, м.б. предс-
в виде: $g = g_1 \vee \dots \vee g_r$, где $g_i \in \mathcal{G}$
при $\forall i, i = 1, \dots, r$.

Постр. по:

Пусть $\Pi = (\Pi_1, \dots, \Pi_r)$ - разб. куба B^m
и пусть для $\forall i, i = 1, \dots, r$, ФАЛ $\varphi_i(x_1, \dots, x_m)$
- харк.-ая для ФАЛ мн-ва Π_i , а $\mathcal{G}^{(i)}$ -
мн-во всех тех ФАЛ $g \in P_2(m)$:
обр. в 0 вне $\Pi_i \Rightarrow \mathcal{G} = [\mathcal{G}^{(i)}]_{i=1}^r$ - ДУМ
порядка m и ранга r связ. с Π .

$\mathcal{G}$ - станд. ДУМ связ с Π , если Π -
разб B^m на посл. отрезки. ординак
Высоты за искл. м.б. последнего.
Пример:

x_1	x_2	x_3	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{15}	g_{16}	g_{17}	g_{18}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1									
0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1									
0	1	1										0	0	0	1	1	1	1		
1	0	0										0	1	1	0	0	1	1		
1	0	1										1	0	1	0	1	0	1		
1	1	0																0	1	1
1	1	1																1	0	1

Определение ДУМ и описание ДУМ порядка m и ранга p , связанного с разбиением куба B^m на p непустых подмножеств, с указанием его мощности. Построить таблицу значений ФАЛ, образующих описанное ДУМ для разбиения $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$ куба B^3 на 4 подмножества, каждое из которых состоит из двух противоположных наборов.

3 Ми-во ФАЛ $G, G \in P_2(m)$, называется дистриктивно-универсальным ми-ов (ДУМ) порядка m и ранга p , если $\forall$ ФАЛ $g, g \in P_2(m)$, может быть представлена в виде $g = g_1 \vee \dots \vee g_p, g_i \in G$. $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_p)$ - разбиение куба B^m ; π_i - скар. ФАЛ ми-ва π_i . $G^{(i)}$ - ми-во всех тех ФАЛ, кот. = 0 вне π_i .

Ми-во ФАЛ G вида $G = G^{(1)} \vee \dots \vee G^{(p)}$ - ДУМ пор-ка m и ранга p .

Мощность $G^{(i)} = 2^{S_i}$, где $S_i = |\pi_i|$. $\lambda = |G| = \sum_{i=1}^p |G^{(i)}| - (p-1) \leq \sum_{i=1}^p 2^{S_i} \leq p \cdot 2^S$, где $S = \max_{i \in [1, p]} S_i$.

$x_1 \ x_2 \ x_3$	$g_1 \ g_2 \ g_3 \ g_4$	$g_1 \ g_2 \ g_3$	$g_1 \ g_2 \ g_3$	$g_1 \ g_2 \ g_3$
0 0 0	0 0 1 1			
1 1 1	0 1 0 1	0	0	0
0 0 1		0 1 1		
1 1 0	0	1 0 1	0	0
0 1 0			0 1 1	
1 0 1	0		1 0 1	0
0 1 1				0 1 1
1 0 0	0	0	0	1 0 1
	G_1	G_2	G_3	G_4

Определение ДУМ; описание ДУМ порядка m и ранга p , связанного с разбиением куба B^m на p непустых подмножеств. Описание стандартного ДУМ порядка m и высоты s , его ранг и мощность. Построить таблицу значений ФАЛ, образующих стандартное ДУМ порядка 3 и высоты 3.

Мн-во $G \in P_2(m)$ назыв. ДУМ порядка m и ранга p , если $\forall g \in P_2(m)$ можно быть представ. в виде $g = g_1 \vee \dots \vee g_p$. (*)

Пусть $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_p)$ - разбиение куба и $\forall i=1, \dots, p$ $\varphi_i(x_1, \dots, x_m)$ - сокращ. ФАЛ мн-ва π_i , $\sigma^{(i)}$ - мн-во ФАЛ, кот. $\Rightarrow 0$ вне π_i , $G = G^{(1)} \vee \dots \vee G^{(p)}$ - ДУМ пор. m и ранга p .

ДУМ G - ДУМ, связ. с разб. Π .

Стандартный ДУМ порядка m и высоты $s \leq 2^m$ •

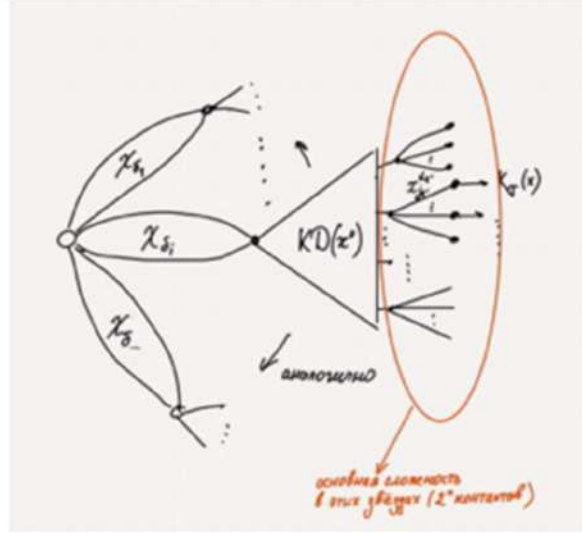
- ДУМ ранга $p = \lceil \frac{2^m}{s} \rceil$, связ. с разб. $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_p)$ куба B^m на посл. отрезки, $\forall \pi_i, \pi_j$ ^{помер.} $\forall$ которых $s \pi_i < \pi_j$ ^{помер.} $\forall$ которых $s \pi_j < \pi_i$, или $i < j$, и ввын.: $s_1 = s_2 = \dots = s_{p-1} = s$, $s_p = 2^m - (p-1)s \leq s$. Для нег. $\lambda = |G| \leq p 2^s$.

Для ДУМ, связ. с разб., и стандартного ДУМ, кот-мо (*) справ. $g = \varphi_1 g_1 \vee \varphi_2 g_2 \vee \dots \vee \varphi_p g_p$.

x_1	x_2	x_3	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{15}	g_{16}	g_{17}	g_{18}
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1										
0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1										
0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1										
0	1	1									0	0	0	1	1	1	1			
1	0	0									0	1	1	0	0	1	1			
1	0	1									1	0	1	0	1	0	1			
1	1	0																0	1	1
1	1	1																1	0	1

Формулировка утверждения о построении КС, реализующей систему $\vec{Q}_n$ ($n = 1, 2, \dots$), состоящую из всех ЭК ранга n от БП $x_1, \dots, x_n$, асимптотическое поведение сложности $L^K(\vec{Q}_n)$. Описание разложения (представления) ЭК на котором основано доказательство этого утверждения, и структуры соответствующих схем с указанием основной сложности подсхемы.

$$\vec{Q}_n = \{K_\sigma(x) = x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n} \mid (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in B^n\}.$$



Утв.

$$L^K(\vec{Q}_n) \lesssim 2^n.$$

Описание схемы и разложения.

Пусть

$$x = (\underbrace{x_1, \dots, x_q}_{x'}, \underbrace{x_{q+1}, \dots, x_n}_{x''}).$$

Пусть $q = m + 2^m \leq n$, и $G = \vec{Q}_m(x_1, \dots, x_m)$, $|G| = 2^m$. Построим разбиение $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^{q-m}})$ куба B^q на m -регулярные множества так¹, что любая ЭК из G совпадает на δ_i с переменной или отрицанием переменной из $\{x_{m+1}, \dots, x_q\}$. Тогда т.к. любая конъюнкция $K_{\sigma'}(x')$ на наборах δ_i совпадает с некоторой ЭК из G , то представима на δ_i как:

$$K_{\sigma'}(x') = x_{j_{\sigma'}}^{\alpha_{\sigma'}}, \quad \forall \sigma' = (\sigma_1, \dots, \sigma_q) \in \delta_i;$$

Тогда²

$$K_\sigma(x) = K_{\sigma'}(x') \cdot K_{\sigma''}(x'') = \chi_{\delta_i}(x') \cdot K_{\sigma''}(x'') \cdot x_{j_{\sigma'}}^{\alpha_{\sigma'}}$$

Схему строим в соответствии с этим разложением для каждой ЭК³ — см. рис.

Её сложность (при правильном подборе параметров) $2^n + o(2^n)$.

Исходя из тривиальной нижней оценки (т.к. $|\vec{Q}| = 2^n$):

Следствие. $L^K(\vec{Q}_n) \sim 2^n$.

Определение теста для отделимой по столбцам матрицы M , $M \in B^{p,s}$, и цели контроля $\mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ – множество неупорядоченных пар, состоящих из различных чисел отрезка $[0, 1]$, понятие тупикового и минимального теста для $(M, \mathcal{N})$. Определение ФАЛ $F(y_1, \dots, y_p)$ теста для $(M, \mathcal{N})$, ее свойства и связь с тупиковыми тестами.

матрица, сост. из разн. столбцов, назыв.
отделимой по столбцам матрицей.
Цель контроля – м-во $\mathcal{N}$, сост. из неупор.
пар разн. чисел $[1, S]$, для кот. парам.
столбцов матрицы с соотв. значениями
необход. отличать.
м-во строк матрицы с ном. из $T \subseteq [1, P]$,
называет. тестом для матрицы типа $\mathcal{N}$.
если $\forall (i, j) \in \mathcal{N} \exists t \in T: M_{\leftarrow t, i} > M_{\leftarrow t, j}$ – обозн. $(M, \mathcal{N})$.
Тест, который имеет мин. ^{покрытия} ^{т.е. длину} – минимальный.
Тест, который перестаёт быть тестом при
удал. любой своей строки, назыв. тупиковым.
 M – отделим. по столб. матрица, сопост. кот. строкам
БП y_i , а $\forall \beta \in B^p$, знач. этих перемен. $y = (y_1, \dots, y_p)$ –
м-во строк M с ном. из $I = I(\beta) \subseteq [1, P]$, $i \in I(\beta)$
 $\Leftrightarrow \beta_{\langle i \rangle} = 1$. $F(y) : F(\beta) = 1 \Leftrightarrow$ сист. строк
 M с ном. из $I(\beta)$ обр. тест. для $(M, \mathcal{N})$ –
ф-ция теста для $(M, \mathcal{N})$.
ФАЛ теста авл. ФАЛ покрытия для
 $M \in B^{p,s}$, $s = |\mathcal{N}|$, где столб. (i, j) парам. в $\mathcal{N}$
 $\oplus i$ и j столб. M .
С помощью ф-ции теста можно выделить
все тупиковые тесты.

ЕСЛИ НЕ МОЖЕШЬ ЧИТАТЬ МОИ ИЕРОГЛИФЫ, ТО НАЧАЛО ВОПРОСА ПРОДУБЛИРОВАНО НА СЛЕДУЮЩЕЙ СТРАНИЦЕ ТЕХОМ.

Определение теста для отделимой по столбца матрицы M , $M \in B^{p,s}$, и цели контроля $\mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ – множество неупорядоченных пар, состоящих из различных чисел отрезка $[1, s]$, понятие тупикового и минимального теста для $(M, \mathcal{N})$. Сведение задачи о построении теста (тупикового теста) для $(M, \mathcal{N})$ к задаче о построении покрытия (тупикового покрытия) для модифицированной матрицы M .

Матрица называется отделимой по столбцам, если она состоит из различных столбцов.

Цель контроля – множество $\mathcal{N}$, состоящее из тех неупорядоченных пар различных чисел отрезка $[1, s]$, для которых пары столбцов матрицы с соответствующими номерами необходимо отличать друг от друга, сравнивая значения, расположенных в тех или иных строках данной пары столбцов.

Тестом для матрицы M относительно множества $\mathcal{N}$ называется множество строк матрицы M с номерами из $T \subseteq [1, p]$, если для любой пары (i, j) из $\mathcal{N}$ существует $t \in T$ такое что, что $M \langle t, i \rangle \neq M \langle t, j \rangle$.

Тест, который перестает быть тестом при удалении любой своей строки, называется тупиковым.

Тест, имеющий минимальную мощность (то есть длину) – это минимальный тест.

Сопоставим паре $(M, \mathcal{N})$ матрицу M из множества $B^{p,S}$, $S = |\mathcal{N}|$, столбцы которой пронумерованы парами из $\mathcal{N}$, а ее столбец с номером $(i, j) \in \mathcal{N}$ получается в результате поразрядного сложения по модулю 2 столбцов с номерами i и j матрицы M . Заметим, что строки матрицы M с номерами из множества T , $T \subseteq [1, p]$, образуют тест (тупиковый тест, минимальный тест) для пары $(M, \mathcal{N})$ тогда и только тогда, когда строки матрицы M с номерами из T образуют покрытие (тупиковое покрытие, покрытие минимальной длины) матрицы M . Отсюда вытекает, в частности, что ФАЛ теста F для пары $(M, \mathcal{N})$ является одновременно ФАЛ покрытия для матрицы M и обратно, а значит для нее, в силу леммы 6.1 главы 1, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Функция теста $f(y_1, \dots, y_p)$ для отделимой по столбцам матрицы M , $M \in B^{p,s}$, и цели контроля $\mathcal{N}$ может быть задана с помощью КНФ*

$$f(y_1, \dots, y_p) = \bigwedge_{(i,j) \in \mathcal{N}} \left(\bigvee_{\substack{1 \leq t \leq p \\ M \langle t, i \rangle \neq M \langle t, j \rangle}} y_t \right), \quad (1.1)$$

Определение диагностического теста отделимой по столбца матрицы M , $M \in B^{p,s}$, понятие тупикового и минимального диагностического теста. Формулировка утверждения о границах длины диагностического теста для произвольной матрицы указанного вида при заданном s .

Матрица отделима по столбцам - матрица, сост. из разн. столбцов.

Когда целью копирования авт. диагностика является, т.е. если N ^{← цель матрицы} сост. из всех разн. столбцов матрицы, то тест диагностический.

Тест, переставляющий быть тестом при уда. ∇ своих строк, назыв тупиковый.

Тест с миним. мощностью (длиной) - минимальный.

Лемма.

Длина любого тупикового диаг. теста для отделим. по столбцам матрицы из $B^{p,s}$ лежит в пределах от $\lceil \log s \rceil$ до $(s-1)$.

Определение диагностического теста отделимой по столбца матрицы M , $M \in B^{p,s}$, понятие тупикового и минимального диагностического теста. Формулировка утверждения об оценках длины диагностического теста для почти всех матриц указанного вида, где $p = p(s)$ и $s = 1, 2, \dots$

(II) Мн-во строк матр. M с координатами из T , $T \subseteq [1, p]$, наз. тестом для (M, N) , если для $\forall$ пары (i, j) из N суш. $t \in T$ $M_{<t, i>} \neq M_{<t, j>}$.

Тест диагност., если ускоренные диагностика сист., или $N = \{(1, 2), (1, 3), \dots, (1, s), (2, 3), \dots, (2, s), \dots\}$

Пусть T -диагност. тест, тогда:

- туп. тест, если: не $\exists T' \subseteq T$
- мин. тест, если: $\forall T', |T'| \geq |T|$ где T' -тест диагност.

$\exists \varphi(s), t(s), p(s) \in \mathbb{Z}_0^+$ (целост. неотр.), $s \in \mathbb{N}$, где кот:

$$t(s) = \lceil 2 \log s \rceil + \varphi(s), p(s) \geq t(s)$$

$$\varphi(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \infty$$

Тогда у почти всех отдел. по столб. матр. из $B^{p(s), s}$ первые $t(s)$ строк образ. диагност. тест.

Определение диагностического теста для таблицы; утверждение об оценках длины диагностического теста для произвольной таблицы с заданным числом столбцов и утверждение об оценке его длины для почти всех таких таблиц.

н7.

мн-во строк. матрицы M в номерах из T , $T \subseteq [1, p]$, наз. тестом для (M, N) , если для $\forall$ пары (i, j) из N сущ. t , $t \in T$: $M\langle t, i \rangle \neq M\langle t, j \rangle$.

Тест различает, если успешно контролирует абн. диагностика системы.

сл. 1.2.

Длина $\forall$ тип. различит. теста для отделимой по столбцам из мн-ва $B_{p,s}$ закл. в пределах от $\lceil \log s \rceil$ до $(s-1)$.

сл. 1.3

$\exists \psi(s), t(s), p(s)$ - усл. числ. неотр. фун-ии. $s \in \mathbb{N}$, где кот.: $t(s) = \lceil \sqrt{2} \log s \rceil + \psi(s)$, $p(s) \gg t(s)$, $\psi(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \infty$, тогда у почти всех отделимых по столбцам матриц из $B_{p(s), t(s)}$ первые $t(s)$ строк обр. диагност. тест.

Определение КС, корректирующей p обрывов и q замыканий, сложности реализации ФАЛ в классе таких схем и соответствующей функции Шеннона $L_{(p,q)}^K(n)$. Построение КС, корректирующих 1 обрыв (1 замыкание) на основе самокоррекции в подсхемах («звездах») из однотипных контактов, формулировка утверждения о сложности полученных КС и идея его доказательства. Утверждение об асимптотическом поведении функций Шеннона $L_{(1,0)}^K(n)$ и $L_{(0,1)}^K(n)$, его обоснование.

$\exists \Sigma \in \mathcal{U}^k, \Sigma$ - КС коррект. p обрывов и q замык., или Σ это (p,q) -самокоррект. КС $\Leftrightarrow \forall \text{КС } \Sigma'$ получ. из Σ обрывом V и p контактов и замык. $V \leq q$ контактов эквив. Σ .

$L_{(p,q)}^*(f) = \min_{\substack{\Sigma \text{ эквив. } f \\ \text{и испр. } p \\ \text{обр. и } q \text{ замык.}}} L(\Sigma) = \min_{\Sigma \text{ эквив. } f} L(\Sigma(p,q))$

$L_{p,q}^k(n) = \max_{f \in R(n)} L_{p,q}^*(f)$

Для $\forall \text{КС } \Sigma \exists$ экв. ей $(1,0)$ и $(0,1)$ самокоррект. КС Σ' и Σ'' соотв. такие, что $L(\Sigma') \leq L(\Sigma) + S(\Sigma)$, $L(\Sigma'') \leq L(\Sigma) + S(\Sigma)$.

Идея: $\exists \Sigma \Rightarrow \Sigma^{(1)} \cup \Sigma^{(2)} \cup \dots \cup \Sigma^{(n)}, \tau = S(\Sigma)$ (контроль по конт. и число обрыв. замыканий)

$\Sigma^{(1)} \cup \dots \cup \Sigma^{(n)}$ экв. Σ и коррект. $(1,0)$ и $(0,1)$

$L = m$ $\xrightarrow{(1,0)}$ $L = m+1$ $\xrightarrow{(0,1)}$ $L = m+1$

$\Rightarrow L(\hat{\Sigma}) \leq L(\Sigma) + \tau$

(10)

Для $n=1,2,\dots$ имеет место след. асимпт. рав-ва:
 $L_{(1,0)}^k(n) \sim L_{(0,1)}^k(n) \sim 2^n/n$.

Идея:
 Из оценки $L^*(f) \leq L_{(p,q)}^*(f)$, $L^*(n) \leq L_{(1,0)}^k(n)$
 и из оценки $L^*(f) \geq n$ (где $\forall n$ сумм. зав. от всех Ω)
 Верх. $\leftarrow$ для произв. $f \in R(n)$ постро. по асимпт. эквив. между сигналами $\Rightarrow L(\Sigma) \leq \frac{2^n}{n} (1 + O(1/\sqrt{n})) \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ по лемме к т.о. $\Rightarrow S(\Sigma) = O(2^n/n^{3/2}) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \exists \text{КС } \Sigma'_f \in \mathcal{U}_{(1,0)}^k \text{ и КС } \Sigma''_f \in \mathcal{U}_{(0,1)}^k \text{ урв. экв.}$

Неверная оценка на второй части картинки для нижней оценки: $L^k(f) \geq n$ исправьте на $L^k \geq \frac{2^n}{n}$ следствие из 19.1.

Определение КС, корректирующей p обрывов и q замыканий, сложности реализации ФАЛ в классе таких схем. Построение КС, корректирующих p обрывов и q замыканий с помощью дублирования, формулировка утверждения о верхней оценке их сложности и идея его доказательства.

Сост. обрыва - контакт не проводит.

Сост. замыкания - провод. при любых значениях БП.

КС Σ кор. p обрывов и q замык. ($p \geq 0, q \geq 0$)
 Если $\nexists$ КС Σ' , пом. может быть получ.
 из Σ в рез. обрыва не более чем p , и
 замык. не более чем q , контактов, эквивал.
 $\Sigma \in U_{(p,q)}^k$ - м-во всех (p,q) -самкор. КС.

Простейший способ построения:

Менее работ контактов вида x_i^0 и-схем,
 сост. из $(q+1)$ паралл. соед. цепи, контакты
 из кот. включает в себя $(q+1)$ паралл.
 соед. контактов вида x_i^0 .

Для этого способа верно:

Лемма

$\forall p \geq 0, q \geq 0$ и $\forall$ КС $\Sigma \in U_{(p,q)}^k$, для
 которой: $L(\Sigma') \leq (p+1)(q+1)L(\Sigma)$

идея:

Оценка следует из того факта, что указ.
 выше способом мы заменили каждый
 контакт из Σ $(q+1)$ цепочками, контакты из
 кот. состоят из $(p+1)$ контактов.

Для ФАЛ $f, p \geq 0, q \geq 0$ опред. её (p,q) -самкор. конт. схем.
 $L_{(p,q)}^k(f)$ - мин. схем КС $\Sigma \in U_{(p,q)}^k$, реализ. f .
 $L_{(p,q)}^k(n)$ - функция минимума: $L_{(p,q)}^k(n) = \min_{f \in P_2(n)} L_{(p,q)}^k(f)$.

Определение сложности $L^C(f)$ ФАЛ f , функции Шеннона $L^C(n)$ и ее асимптотическое поведение. Описание структуры СФЭ, построенной для ФАЛ f по методу Лупанова.

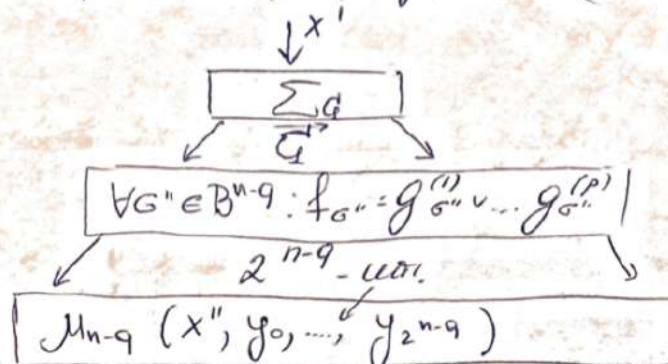
№6.

$$L^C(f) = \min_{S \text{ реал. } f} L(S), \text{ где } L(S) - \text{число ФЭ в СФЭ.}$$

$$L^C(n) = \max_{f \in P_2(n)} L^C(f)$$

$$L^C(n) \leq 8 \cdot \frac{2^n}{n}, \text{ но } L^C(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

Как и в методе Шеннона разн. ФАЛ f по $(n-q)$ посл. пер. $\Rightarrow$ Найдем СФЭ реал. ФАЛ f в виде $\Sigma f = \Sigma''(\Sigma')$, где Σ'' - мультиплекс. порядка $(n-q)$, а Σ' - реализ. сист. фун-ций, кот. реализ. все ФАЛ вида $f_{\sigma''}(x')$, где $x' = (x_1, \dots, x_q)$, $\sigma'' \in B^{n-q}$ и $f_{\sigma''} = f(x', \sigma'') \Rightarrow$ каждая такая ФАЛ реализ. как $\vee$ характ. ФАЛ станд. ДУМ Σ порядка q и выс. s , Σ_q - СФЭ реал. сист. ФАЛ $\vec{g}$ - моделир. функц. их св. ДНФ. ~~Для реализ. каждой ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$ нужно (2^{n-q}) ФЭ $\vee$~~



Определение сложности $L^C(f)$ ФАЛ f в классе СФЭ. Формулировка утверждения о нижней оценке сложности реализации ФАЛ f в классе СФЭ, получаемой с помощью «забывания» константами одной из ее БП. Мультиплексорная ФАЛ μ_n порядка n и получение с помощью этого утверждения нижней оценки для ее сложности $L^C(\mu_n)$. Верхние оценки данной сложности и ее асимптотическое поведение.

$$(9) \quad L^C(f) = \min_{\Sigma \text{ реал. } f} L(\Sigma)$$

Если f — существенной БП ФАЛ $f \in P_2(n)$, и для любого (некот.) $\sigma, \sigma \in B$, ФАЛ $f|_{x_n=\sigma} = f(x_1, \dots, x_{n-1}, \sigma) \neq 0$, то $L_{B,n}^C(f) \geq \min \{L_{B,n}^C(f|_{x_n=0}), L_{B,n}^C(f|_{x_n=1})\} + 2$
(соотв. $L_{B,n}^C(f) \geq L_{B,n}^C(f|_{x_n=\sigma}) + 1$)

$$\mu_n(x_1, \dots, x_n, y_0, \dots, y_{2^n-1}) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \\ \in B^n}} x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n} \cdot y_{\sigma_1, \dots, \sigma_n}$$

$$L^C(\mu_n) \geq 2^{n+1} - n - 1, \text{ т.к.}$$

по утв. выше: к y_0 конст. σ_0 (сущ. зав. от σ_0)

к y_1 — " — σ_1 (— " —)

• • • • •

к y_{2^n-1} — " — σ_{2^n-1} (— " —)

$$\Rightarrow \mu_n(x_1, \dots, x_n, \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{2^n-2}, \sigma_{2^n-1}) = g \Rightarrow$$

$$L_{B,n}^C(\mu_n) \geq 2(2^n - 1) + \underbrace{L_{B,n}^C(g)}_{\substack{\text{сущ. зав. от} \\ x_1, \dots, x_n, y_{2^n-1} \\ \geq n}} \geq 2^{n+1} - n - 2$$

$$\Rightarrow L^C(\mu_n) \geq 2^{n+1} - n - 1.$$

$$L^C(\mu_n) \leq 2 \cdot 2^n + O(2^n/n), \quad L^C(\mu_n) \sim 2^{n+1}$$

стр. 92, 94, 121, 130

Определение сложности $L^K(f)$ ФАЛ f в классе КС и формулировка утверждения о простейшей нижней оценке этой сложности. Линейная ФАЛ порядка n и нижняя оценка указанного вида для ее сложности. Верхняя оценка этой сложности, получаемая на основе схемы Кардо, и структура данной схемы.

(8)

$$L^K(f) = \min_{\Sigma \text{ реал.}} L(\Sigma);$$

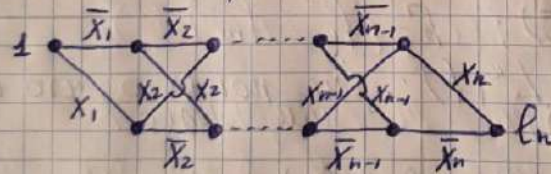
Если ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ суц. зав. от своих всех переи., то:
 $L^c(f) \geq n-1$, $L^K(f) \geq n$.

Если при этом ФАЛ f не явл. монот. ФАЛ (каждое БП x_i , $i \in [1, k]$, не явл. ни монот., ни анимонот. БП ФАЛ f), то
 $L^c(f) \geq n$ (сооб. $L^K(f) \geq n+k$)

$$L^K(l_n) \geq 2n$$

$(x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n \oplus 1)$ - общ. вид.

$L^K(l_n) \leq 4n-4$, т.к. (схема Кардо):



стр. 92, 98

Определение сложности $L^K(f)$ системы ФАЛ $F = (f_1, \dots, f_m)$ в классе КС и формулировка утверждения о (нетривиальной) нижней оценке этой сложности. Дизъюнктивный дешифратор $\vec{J}_n$ порядка n и получение с помощью указанного утверждения нижней оценки его сложности $L^K(\vec{J}_n)$. Верхние оценки данной сложности и ее асимптотическое поведение.

(3) $L^K(f) = \min_{S \text{ реализует } f} L(S); \max_{f \in F} L^K(f) \leq L^K(F) \leq \sum_{i=1}^m L^K(f_i)$
 $F = (f_1, \dots, f_m)$
 $L^K(Q(n)) = \max_{f \in Q(n)} L^K(f);$ не понятно что из этого или како..
 Если сист. ФАЛ $F = (f_1, \dots, f_m)$ сост. из попарно разн. ФАЛ от БПХ(n) отп. от "0" и "1", то: $L^K(F) \approx \frac{\sum_{i=1}^m |N_{f_i}|}{2^{n-1}}$
 $L^K(\vec{J}_n) \approx 2^{n+1} - 2$, т.к.:
 $L^K(\vec{J}_n) \approx m, \vec{J}_n = \{ \{x_1^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n}\} : (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in B^n \},$
 $|N_f| = 2^n - 1, m = 2^n \Rightarrow L^K(\vec{J}_n) \approx \frac{2^n(2^n - 1)}{2^{n-1}} = 2^{n+1} - 2.$
 $L^K(\vec{J}_n) \leq 2^{n+2} - 6; L^K(\vec{J}_n) \leq 2^{n+1} + O(2^n/n)$
 $L^K(\vec{J}_n) \sim 2^{n+1}.$
 стр. 121, 122, 129, 95

$L^K(F) = \min(L(S))$ во всем S , где S реализует систему F . Часть с $L^K(J_n) \geq m$ можно убрать из доказательства (убрать только это неравенство).

Определение сложности $L^K(f)$, функции Шеннона $L^k(n)$ и ее верхняя оценка, получаемая с помощью метода Лупанова. Описание структуры КС, построенной этим методом.

$$L^K(f) = \min_{S \text{ реализ. } f} L(S)$$

$$L^k(n) = \max_{f \in P_2(n)} L^K(f)$$

Для $\forall$ ФАП $f \in P_2(n) \exists$ реализ. ее КС $\Sigma_f: L(\Sigma_f) \leq \frac{2^n}{n} \cdot (1 + O(\frac{1}{\sqrt{n}}))$.

КС по методу Лупанова строится след. образом:

- 1) Строится стандартное ДУМ G порядка q и высоты S .
- 2) Строится S - m -регул. мин-во наборов куба $B^{m \times p}$, соотв. системе характ. фун-ий $\hat{G}_i$ и Δ . С исп-ем этого разбиения f предст. в виде:

$$f(x', x'') = \bigvee_{i=1}^{2^p} \chi_i(x') \bigvee_{\sigma'' \in (G_{q1}, \dots, G_n)} \chi_{q1}^{\sigma''} \dots \chi_n^{\sigma''} \hat{G}_{\sigma'', i}(x')$$

- 3) Для каждого $i, i = \overline{1 \dots 2^p}$ строится $(1, 2^{n-q})$ -КС Σ'_i , реализ. ФАП $\hat{G}_{\sigma'', i}$.

- 4) $(1, 2^{n-m})$ -КС Σ' получ. в рез-те ототед. входов КС Σ'_i и реализ. систему ФАП вида $\hat{G}_{\sigma'', i}$, где $\sigma'' \in B^{n-q}, i = \overline{1 \dots 2^p}$.

- 5) Строится каскадная $(2^{n-m}, 1)$ -КС Σ'' , реализ. столбец всех ФАП вида $\chi_i(x')$.
 $\chi_{q1}^{\sigma''} \dots \chi_n^{\sigma''}$, где $i = \overline{1 \dots 2^p}, \sigma'' = (G_{q1}, \dots, G_n) \in B^q$

- 6) И/ред КС Σ_f явл. рез-ом суперпоз. $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$.